新版序

新版《微分几何学》是从旧版改写成书的. 在改写中，将原来的文言改为现代用语，将过去用坐标法表达的方式都换成向量分析法，而且对部分记号也改为现在常用的形式，但是对原著的内容丝毫未予更动. 这项工作基本上是姜国英博士一个人做的，只是后来由于他的健康关系，§ 36 以后的部分不得不由原著者自己来足成.

在 1985 年理科数学、力学教材编审委员会几何、拓扑编审组会议上，与会专家提出了改写旧版《微分几何学》的建议，理由是：旧著内容比较丰富，把当时认为是新的一些成果也收进本文或习题里，尤其是第三章线汇论，是建国以来同类教材中所不收进的. 会议认为，这部教材体现了教学与科研相辅相成的精神，对高等院校高年级学生和研究生会起到启发和提高的作用，因而决定由高等教育出版社把这本新版作为参考教材公诸于世.

为了改进这本书的内容，以利于现代发展的需要，原著者曾经打算用现代的方式进行改编，把较难的习题改为本文的一段，或者给它附上启发性解答，使读者能够更多地受益，但是限于时间和精力，这个设想可惜未能实现. 此外，全书原稿虽然都经过原著者的校阅，但错误之处仍在所不免，希望读者随时提出改正的意见.

最后，对于姜国英同志十分周至而严密的改写，原著者表示衷心的感谢. 高等教育出版社张爱和同志为本书的出版尽了最大的努力，在此也表谢意.

苏步青

1987 年元月于上海复旦大学

旧 版 序

本书系集著者1931年至1947年在国立浙江大学所授之讲义而成，其间曾窜改增补五六次之多，记号务求简易，行文务求浅近. 参考英、美、德、法、意、日等国几何学者名著不下十种，所收习题较难者加上星号，并附原著者姓名及年份，俾读者可获查考之径路.

微分几何学一门占数学之一重要地位. 尤以近年来相对论、电机学等方面需要绝对微分学殊殷，该学之运算与夫空间概念之推广殆有不可分离之势. 故本书内特添一节(§25)，作为导引. 兹当国内高等数学参考书缺乏之际，本书如能有助于教学研究，亦著者之荣也. 自愧学识谫薄，虽经十六年间之删补，而错误之处仍应不免，尚祈海内学者教而正之.

吴俊传、金福临、杨忠道三学士协助本书校对，且杨君为绘插图，对于三君特申谢意. 正中书局总编辑吴士选先生多方协理本书出版，尤深感激.

一九四七年六月苏步青志于杭州浙大.

目　录

第一章　曲　线　论

第二章 曲面论

第三章 线 汇 论

绪　论

依照 F. Klein(1872)的定义，我们是可以用几何学变换群对几何学进行分类的. 详细地说，当已知一个几何学变换群G时，所谓属于G的几何学，就是研究图形在此群作用下的不变性质.

几何学的研究对象是图形. 按照所研究图形的性质，可分成两种情况进行讨论. 第一种是关于全图形所具有的性质。例如，决定一条直线与一条圆锥曲线交点的问题就属于此类性质的问题，因为所求的交点是由直线与曲线的整体位置决定的. 第二种是关于图形的局部性质. 例如，在曲线上一点引曲线的切线就与这种性质有关，因为大家知道，切线仅仅涉及到曲线在切点附近一阶展开的状况，而与曲线在其他部分的更改毫无关系. 对后一性质的研究便属于经典微分几何的范畴.

因为微分几何学是为了研究图形在其元素近旁性质而发展起来的一门学科，所以必然要运用函数及微积分学作为工具. 自古以来，Euler(1744)，Monge(1807)，Lagrange(1813)，Cauchy(1826)等著名数学家把微积分学应用于曲线、曲面的研究，这也是微分几何学的开端. 然而微分几何这门学科的系统化，则是与C. F. Gauss(1826)的努力分不开的. 另外，十九世纪时的几何学家，如Ossian Bonnet，Sophus Lie，E. Beltrami，E. Cesàro，J. Weingarten，G. Darboux等人对于微分几何学的发展都作出相当的贡献. 详细情况可参看Knoblauch著的《Grundlagen der Differentialgeometrie(Leipzig，1913).

从Klein的分类方法来看，经典的微分几何学应隶属于运动

群，所以经典微分几何学也称为运动几何学或初等微分几何学. 如果我们用别的基本变换群来替代运动群，那么就能得到其他种类的微分几何学. 这个想法的具体化便是二十世纪以来几何学的一系列新发展. 例如 G. Fubini (1916) 的射影微分几何学，W. Blaschke (1916) 的仿射微分几何学，G. Thomsen 与 W. Blaschke (1923)的保角微分几何学等都是在 Klein 的这个具有深远影响的思想指导下产生的.

如上所述，要创立新的几何学，改变基本变换群是一条途径，但是更可以推广图形所在的空间，即推广普通的三维欧氏空间或更一般的 n 维欧氏空间. 1854 年，B. Riemann 把欧氏空间推广成更一般的空间，创立了现代通称为黎曼几何学的新几何学科. 接着，G. Ricci-Curbastro (1900) 发现了绝对微分学，A. Einstein (1916) 首先把它应用于相对论，第二年(1917) 又有了 T. Levi-Civita 的平行概念. 微分几何学发展到这里，获得了长足的进步. 后来，J. A. Schouten(1924) 首先发现几十年来指导几何学发展的 Klein 分类法思想有缺陷，而就此作出了改进. 现代所盛行的联络理论便是黎曼几何学更进一步的推广. 这方面的详细情况可参考 D. J. Struik 著的《Theory of Linear Connections》(1934).

由此可见，初等微分几何学是一门古老陈旧的学科，固然无须多言，但它形成了现代微分几何学的基础，也是毋庸置疑的. 初等微分几何学所用的研究工具大部分是微积分学，但必须指出，我们研究的目标并非分析学，而是几何学. 所以在学习时必须尽量避免繁复演算的影响，重视对象的几何学意义.

尤其值得注意的是，近年来实函数论发展异常迅速. 将这方面的思想应用于微分几何学，以求改进和推广，大有其人. 这也是不容忽视的动向.

第一章　曲　线　论

§1. 挠曲线的解析表示

设 x, y, z 为一点的直交坐标. 对于坐标轴的正方向有下列规定, 即当我们头朝 z 轴正向且面向 x 轴正向时, y 轴正向在左边(参照图 1).

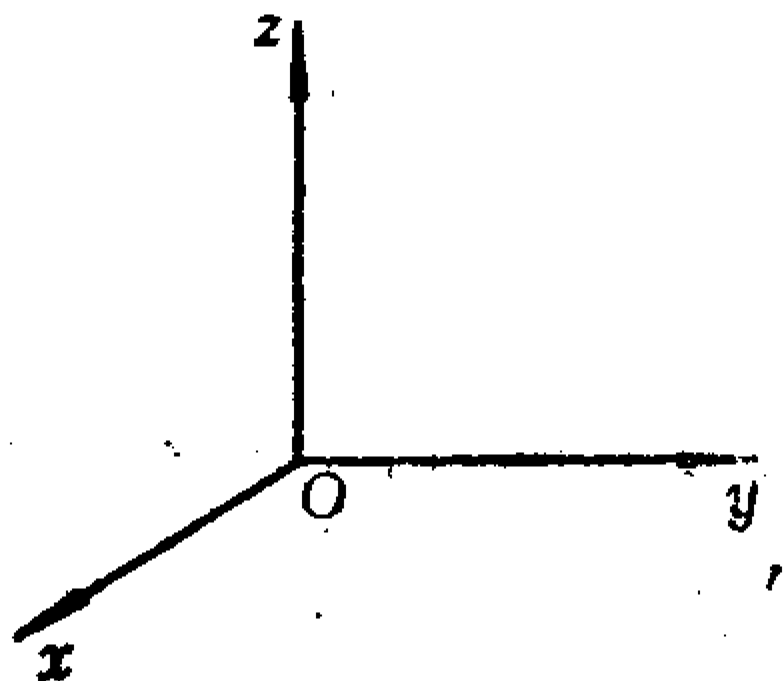


图 1

如果点 P 的坐标 x, y, z 都是同一个参数 t 的函数, 即

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \tag{1}$$

则由于 t 的变动, 点 P 所画的轨迹称为一条**空间曲线**或**挠曲线**. 反过来, 已知一条挠曲线时, 可把其上任何一点的坐标表示为形式(1)的方程. 因此, (1)称为这条曲线的**解析表示**. 今后常把(1)式写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t), y(t), z(t)), \tag{2}$$

并假设三个函数 $x(t), y(t), z(t)$ 的第一、第二、第三阶导数均存在且为 t 的连续函数. 简言之, 所讨论的曲线属于 C^3 级. 曲线上参数为 t 的点 P 有时就简称为 t 点或 $P(t)$ 点.

例 1　设一直角三角形纸片的一个锐角为 θ. 现在把这纸片卷在一圆柱上, 使 θ 的一边与圆柱的一个**法截圆**重合, 求另一边所卷成的曲线.

以圆柱轴为 z 轴且取 x, y 二轴如图 2, 则容易知道所求曲线的解析表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, at\operatorname{tg}\theta),$$

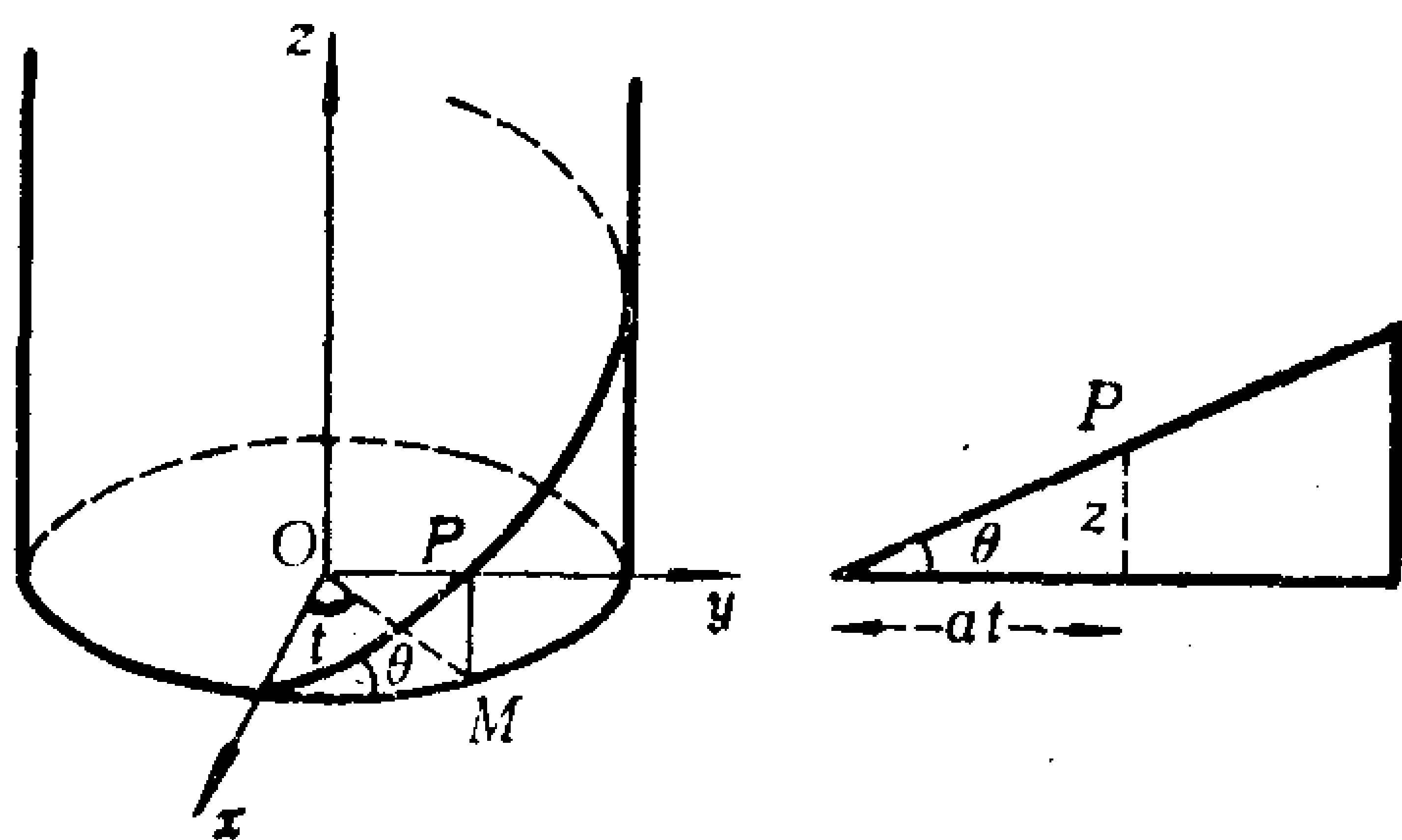


图 2

式中 a 是圆柱的半径. 此曲线称为**螺线**.

例 2 证明:曲线(2)在一定平面上的充要条件是

$$(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))=0, \text{即}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

这里“$'$”,“$''$”,“$'''$”分别表示一阶,二阶,三阶导数.

证明 设曲线(2)在一平面上, 如记 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ 为此平面的法方向,则有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t)=d,$$

这里的 a,b,c,d 皆为常数,且 a,b,c 不全为零. 关于 t 微分上式,依次得到

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}''(t)=0,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'''(t)=0. \tag{4}$$

(4)是关于 a,b,c 的线性方程组,由于 a,b,c 中至少有一个不等于零,所以(3)式成立是必要条件.

反之, 如果(3)成立. 则必有三个函数 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ 使 $\boldsymbol{n}(t)=(a(t), b(t), c(t))$满足(4)式. 对(4)的前两式关于 t 微分并利用(4)化简后得到

$$\boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0,\boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)=0,$$

这说明 $\boldsymbol{n}'(t)$ 与 $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$ 平行，但从(4)知 $\boldsymbol{n}(t)$ 亦有同一性质，故

$$\frac{a'(t)}{a(t)}=\frac{b'(t)}{b(t)}=\frac{c'(t)}{c(t)}.$$

把这比例因子记为 $\varphi'(t)$，积分后有

$$a=a_0e^{\varphi},b=b_0e^{\varphi},c=c_0e^{\varphi},$$

其中 a_0,b_0，c_0 都是常数. 代入(4)的第一个等式，约去非零因子 e^{φ} 并再积分，即知曲线(1)是**平面曲线**.

1. 切线

从一曲线(2)上取两点，设其参数值为 t 及 $t+\Delta t$，则两点连线的方向与 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ 相平行. 然而依照平均值定理，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\\&\quad=(\Delta t\cdot x'(t+\theta_1\Delta t),\Delta t\cdot y'(t+\theta_2\Delta t),\Delta t\cdot z'(t+\theta_3\Delta t)).\end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2,\theta_3<1$，于是连线的方程是

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t)=\lambda(x'(t+\theta_1\Delta t),y'(t+\theta_2\Delta t),z'(t+\theta_3\Delta t)),$$

式中 $\boldsymbol{\rho}=(\xi,\eta,\zeta)$ 表示直线上动点的坐标，λ 则是参数. 当 $\Delta t\to 0$ 时，若此直线有极限位置，则其方程为

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t)=\lambda\boldsymbol{r}'(t), \tag{5}$$

所得直线称为曲线在点 t 的**切线**.

如果在点 t，三个导数 x',y',z' 皆取零值，则在这点的切线就无法确定. 这种点称为曲线的**奇点**，不在讨论范围之内.

2. 曲线弧

已知一曲线 C 的解析表示是(1)或(2)时，必须知道这种表示不仅随所参考的坐标系的不同而更改，而且与参数的选择也有联系. 换句话说，在变换坐标系时，点的直交坐标应当受到直交变

换，即

$$x^* = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a,$$
$$y^* = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b, \qquad (6)$$
$$z^* = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c,$$

式中 $a_{ik}(i,k=1,2,3)$；a,b,c 皆为常数，并且

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ki}^2 = 1 \quad (i=1,2,3);$$
$$\sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj} = 0 \quad (i \neq j, i, j=1,2,3). \qquad (7)$$

这时(2)式就化为

$$\boldsymbol{r}^*(t) = (x^*(t), y^*(t), z^*(t)). \qquad (2^*)$$

又对于给定的坐标系更可以变换参数 t 为 τ，即

$$t = f(\tau), \qquad (8)$$

式中 $f(\tau)$ 是 τ 的递增函数．于是 x，y，z 皆为 τ 的函数．所以对于同一曲线，它的表示方法则有无数种．

然而应该用什么方法来表示挠曲线，使它与直交坐标系及参数的变换都无关呢？凡是对于(6) 不变的图形性质称为**不变性质**，而对于(8) 不变的称为**内在性质**．从而对于挠曲线我们要研究的乃是它的不变且内在性质．

为了决定曲线的一种本有参数，取曲线 C 上的两点 t 及 $t+\Delta t$，且设其间距离为 Δs，则

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2\{x'^2(t+\theta_1\Delta t) + y'^2(t+\theta_2\Delta t) + z'^2(t+\theta_3\Delta t)\}.$$

于是当 $\Delta t \to 0$ 时，$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限值应为

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = |\boldsymbol{r}'(t)|. \qquad (9)$$

因此，曲线在其上两点 t_0 及 t 之间的弧长 s 等于

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt. \tag{10}$$

对于参数变换(8)，弧长 s 并不受影响，这是因为

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right|d\tau. \tag{11}$$

由(11)知函数 s 是曲线 C 的内在参数. 不但如此，而且 s 对于直交变换(6)也是不变的，即有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2=\left|\frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt}\right|^2, \tag{12}$$

所以 s 是曲线的积分不变量.

弧长 s 是参数 t 的函数，所以 t 也为 s 的函数，于是可把曲线表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s)). \tag{13}$$

这时有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^2=1, \tag{14}$$

所以$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$是单位向量；$\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}$是曲线切线的方向余弦.

现在规定 s 的增加方向为切线的正方向，并用 α,β,γ 表示它的方向余弦，且记 $\boldsymbol{T}=(\alpha,\beta,\gamma)$，则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\\&\alpha=\frac{dx}{ds},\ \beta=\frac{dy}{ds},\ \gamma=\frac{dz}{ds}\end{aligned} \tag{15}$$

都是 s 的函数.

在曲线的一点 $P(s)$ 引切线的垂线，其全体在一平面上，称此平面为**法平面**，它的方程是

$$\boldsymbol{T}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0, \tag{16}$$

即

$$\frac{dx(s)}{ds}(\xi-x(s))+\frac{dy(s)}{ds}(\eta-y(s))+\frac{dz(s)}{ds}(\zeta-z(s))=0,$$

式中的 $x(s), y(s), z(s)$ 表示点 $P(s)$ 的坐标.

3. 曲率

在曲线的一点 s 引切线，它的方向余弦 α, β, γ 都是 s 的函数且满足

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

以原点 O 为中心，作半径为 1 的球面. 以后为方便起见，就称它为**单位球面**. 对于曲线上的点 $P(s)$，取单位球面上的一点 $\bar{P}$，使 $O\bar{P}$ 的方向与曲线在 $P(s)$ 的切线正向一致. $\bar{P}$ 的坐标应当是 (α, β, γ). 当 s 变动时，$\bar{P}$ 的轨迹称为原曲线的**切线象**.

对于曲线上的两点 s 及 $s+\Delta s$，切线象上有对应点 $(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s))$ 及 $(\alpha(s+\Delta s), \beta(s+\Delta s), \gamma(s+\Delta s))$. 设其间距离为 $\Delta\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}(\Delta\varepsilon)^2&=(\alpha(s+\Delta s)-\alpha(s))^2+(\beta(s+\Delta s)-\beta(s))^2\\&\quad+(\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s))^2\\&=(\Delta s)^2[\alpha'^2(s+\theta_1\Delta s)+\beta'^2(s+\theta_2\Delta s)\\&\quad+\gamma'^2(s+\theta_3\Delta s)],\end{aligned}$$

式中 $0<\theta_1, \theta_2, \theta_3<1$，于是

$$\frac{d\varepsilon}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}=\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}. \tag{17}$$

此极限值称为原曲线在点 s 的**曲率**，且其倒数 r 称为**曲率半径**. 由(17)计算曲率时，平方根有正负号. 为避免复杂计，常规定挠曲线的曲率不小于 0，即 $r\geqq 0$. 我们可把(17)改写为

$$\frac{1}{r^2}=\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^2. \tag{18}$$

从(6),(7)及(18)易知,曲率是不变量.

4. 密切平面

经过曲线上一点 $P(x(s), y(y), z(s))$ 的任何平面 π 由方程

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))\equiv A(\xi-x(s))+B(\eta-y(s))+C(\zeta-z(s))=0 \tag{19}$$

表示，这里的 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是 π 的单位法向量. 现在曲线上取与 P 邻近的点 Q，它对应的弧长是 $s+\Delta s$，Q 的向量表示设为 $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. 将 Δs 看作一阶无穷小，要求决定平面 π，使由 Q 至 π 的距离 δ 至少为三阶无穷小.

在 $P(s)$ 点附近,将 $\boldsymbol{r}(s)$ 按有限阶 Taylor 展开:

$$\boldsymbol{r}(s+\Delta s)=\boldsymbol{r}(s)+\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\Delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}\Delta s^2+$$
$$+\frac{1}{6}\frac{d^3\boldsymbol{r}(s)}{ds^3}\Delta s^3+\boldsymbol{R},$$

式中的余项 $\boldsymbol{R}$ 满足 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{R}}{\Delta s^3}=\boldsymbol{0}$. 所以有

$$\delta=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s))=\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\Delta s+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}\Delta s^2$$
$$+\frac{1}{6}\boldsymbol{n}\cdot\frac{d^3\boldsymbol{r}(s)}{ds^3}\Delta s^3+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}.$$

为了使 δ 至少是三阶无穷小,必须选择平面 π 使得

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=0. \tag{20}$$

由(19)及(20)中消去 A, B, C,即得所求平面的方程为

$$\left(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s),\ \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds},\ \frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}\right)=0, \tag{21}$$

或即

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{d^2x}{ds^2} \\ \eta - y & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{d^2y}{ds^2} \\ \zeta - z & \dfrac{dz}{ds} & \dfrac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0.$$

此平面称为曲线在 $P(s)$ 的**密切平面**.

习　　题

1. 设平面 π 经过曲线在点 P 的切线并含有曲线上 P 的邻近点，当这邻近点沿曲线趋近于 P 时，π 的极限位置是曲线在 P 点的密切平面.

2. 在曲线上 P 点的近旁取曲线上的点 Q 与 R. 当 Q，R 独立趋近于 P 时，平面 PQR 的极限位置就是曲线在 P 点的密切平面.

3. 设三次挠曲线 Γ 的方程为

$$x=t, y=t^2, z=t^3.$$

证明下列两定理:

(1) 设点 P 不在 Γ 上但为 Γ 的三张密切平面的交点，则 P 与这三张密切平面的三个切点共平面.

(2) 从空间的任何一点 P 可作 Γ 的三张密切平面，使得三个切点与 P 是共平面的四点.

4. 用齐次坐标 x, y, z, t 表示曲线，即设

$$x=x(u), y=y(u), z=z(u), t=t(u).$$

证明它的密切平面的方程是

$$\begin{vmatrix} \xi & x & \dfrac{dx}{du} & \dfrac{d^2x}{du^2} \\ \eta & y & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{d^2y}{du^2} \\ \zeta & z & \dfrac{dz}{du} & \dfrac{d^2z}{du^2} \\ \tau & t & \dfrac{dt}{du} & \dfrac{d^2t}{du^2} \end{vmatrix} = 0.$$

5. 任何闭挠曲线的切线象与任何大圆弧必相交(Löwner).

6. 设 Q 为挠曲线 C 的密切平面上的一点，从 Q 把 C 射影到一平面上，证

明 C 的射影必有拐点.

7. 若曲线的切线象为大圆,原曲线必为平面曲线. 若切线象为小圆,则原曲线的切线与定方向成定角. 其逆亦真.

8. 试求曲线在一点的密切平面有更高阶接触的充要条件.

§2. Frenet 公式

在曲线上一点 P 所引的法线,其全体在法平面上. 法平面与在同一点的密切平面有交线,称为曲线在 P 的**主法线**. 设它的单位方向是 $\boldsymbol{N}=(l,m,n)$,则 $l^2+m^2+n^2=1$,且

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{T}=0,$$

$$\left(\boldsymbol{N},\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)=0.$$

从第二个方程知道,可把 $\boldsymbol{N}$ 表示成

$$\boldsymbol{N}=a\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+b\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}.$$

我们已假定所讨论的曲线非直线. 因为 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{T}=0,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}=1$,

$$\boldsymbol{T}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\boldsymbol{T}\cdot\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=0,$$

所以 $a=0$,于是

$$\boldsymbol{N}=b\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}.$$

根据 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}=1$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{1}{r^2}$,容易得出 $b=\pm r$;因此

$$\boldsymbol{N}=\pm r\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}.$$

现在规定上列符号取正号. 它的几何解释如下:对曲线上的点,当向曲线凹进的一侧取主法线的正向时,则上式右端必取正号. 详细证明见后(§4.1).

这时得到下列公式

$$\frac{dT}{ds}=\frac{1}{r}N. \tag{1}$$

其次，从曲线上的P点引该点密切平面的垂线，称为曲线在P的**从法线**，并规定它的正向取法如下：使曲线在P点的切线、主法线、从法线的三个正向间的关系与坐标系的x、y、z三轴完全一致.

也就是说，若记从法线的单位方向是$\boldsymbol{B}=(\lambda,\mu,\nu)$，则$\boldsymbol{B}$平行于$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$，且

$$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ l & m & n\\ \lambda & \mu & \nu\end{vmatrix}=1.$$

然而

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|^2=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^2\cdot\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|^2-\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{r^2}.$$

所以

$$\boldsymbol{B}=\varepsilon r\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\qquad \varepsilon=\pm1.$$

注意到有关$\boldsymbol{B}$方向选取的规定易知$\varepsilon=1$，于是

$$\boldsymbol{B}=r\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},$$

或写成

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}.$$

这表示方阵

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ l & m & n\\ \lambda & \mu & \nu\end{pmatrix}$$

是**直交方阵**：阵中各行或各列元素平方之和皆等于1，不同的两行或两列对应元素乘积之和皆等于0，而且它的行列式数值等于1.即$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$为相互正交成右旋的单位向量.

进而，设曲线在两邻近点 s 及 $s+\Delta s$ 的密切平面相交于角度 $\Delta\sigma$，则当极限值

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\frac{d\sigma}{ds}$$

的绝对值愈大时，密切平面的变动也愈大，故称这极限值为曲线在 s 点的**挠率**，记为 $\frac{1}{\rho}$. ρ 则称为**挠率半径**. 依普通习惯，ρ 的正负一概以螺线（§1，例 1）向右旋或向左旋而定，用图表示如下：

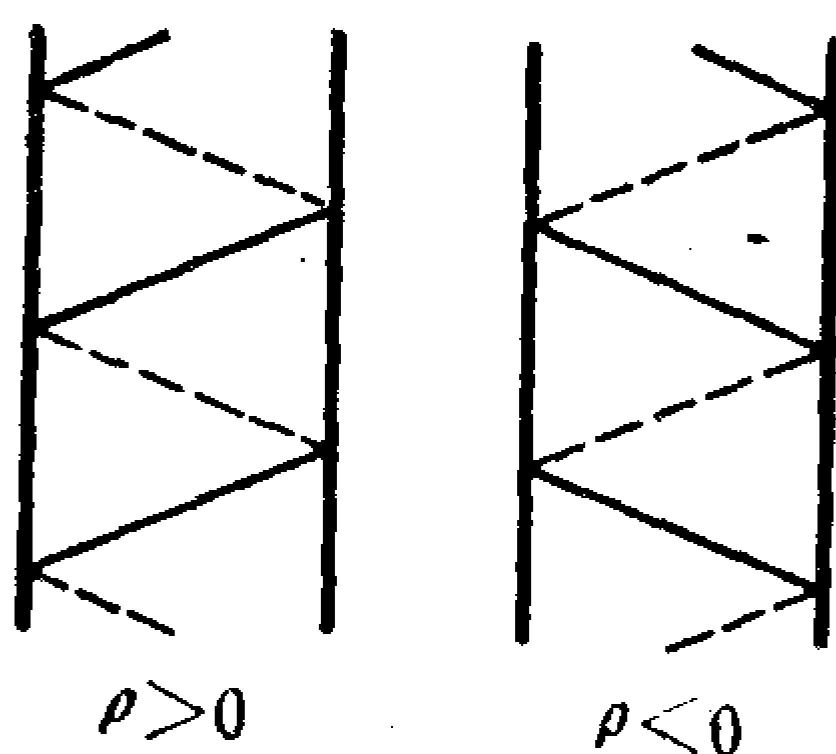


图 3

下面我们先来叙述 ρ 的符号的求法.

因为两密切平面间的交角等于两从法线间的角，我们有

$$d\sigma^2=|d\boldsymbol{B}|^2,$$

于是

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\sigma}{ds}=\varepsilon\left|\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\right| \quad (\varepsilon=\pm 1).$$

至于 ε 的解析决定法如下：从(1)及

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{B}=0$$

得

$$\boldsymbol{T}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}=0.$$

又

$$T\cdot N=0,$$

于是$\left(B,\frac{dB}{ds},N\right)=0$，$\frac{dB}{ds}$ 可表为 B，N 的线性组合．但是从 B 是单位向量易知 $B\cdot\frac{dB}{ds}=0$，所以

$$N=\frac{\frac{dB}{ds}}{\varepsilon'\left|\frac{dB}{ds}\right|},$$

式中的 ε' 虽为 1 或 -1，然而因为 $N=(l,m,n)$，$B=(\lambda,\mu,\nu)$ 的分量皆为已知函数，所以 ε' 的符号是已知的．我们规定

$$\varepsilon=-\varepsilon'.$$

因此，又得到一个公式

$$\frac{dB}{ds}=-\frac{1}{\rho}N. \tag{2}$$

最后，根据 T,N,B 是相互正交成右旋的单位向量，对 $N=B\times T$ 微分，并利用(1)，(2)，便有

$$\begin{aligned}\frac{dN}{ds}&=\frac{dB}{ds}\times T+B\times\frac{dT}{ds}\\&=-\frac{1}{r}T+\frac{1}{\rho}B.\end{aligned} \tag{3}$$

把(1)，(2)，(3)合写成

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds}&=\frac{1}{r}N,\\\frac{dN}{ds}&=-\frac{1}{r}T+\frac{1}{\rho}B,\\\frac{dB}{ds}&=-\frac{1}{\rho}N.\end{aligned} \tag{4}$$

这组公式是由 Frenet(1847)发现的，通常称为 **Frenet 公式**．同一组公式也被 Serret(1851)所独立发现，所以也有 Frenet-Serret 公

式的说法.

以后为了方便起见，凡关于 s 的导数都用撇号 $'$, $''$, $'''$ 等表示，如

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\ \boldsymbol{r}''(s)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\ \boldsymbol{r}'''(s)=\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$$

等等. 将 $\boldsymbol{B}=r(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')$关于 s 求导，利用 Frenet 公式有

$$-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{N}=r'(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')+r(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'''),$$

两边点乘 $\boldsymbol{N}=r\boldsymbol{r}''$ 得到

$$\frac{1}{\rho}=r^2(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}''|^2}.$$

若曲线在每点的挠率等于 0，则必为平面曲线，且其逆亦真(参考 §1,(3)).

现在我们可以证实所作的规定与螺线的普通习惯完全符合. 因为螺线的方程是

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, at\operatorname{tg}\theta),$$

于是 $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2=a^2\sec^2\theta$，所以如令 $t=0$ 时 $s=0$，则

$$s=at\sec\theta.$$

因此，用弧长的函数来表示螺线就是

$$\boldsymbol{r}(s)=\left(a\cos\left(\frac{1}{a}s\cos\theta\right), a\sin\left(\frac{1}{a}s\cos\theta\right), s\sin\theta\right).$$

我们容易求出

$$r=a\sec^2\theta, \rho=a\sec^2\theta\operatorname{ctg}\theta.$$

若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，则螺线右旋且 $\rho>0$；反之，若 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，则螺线左旋而 $\rho<0$.

习　题

1. 设 u,v,w 满足微分方程组

$$\frac{du}{ds}=\frac{v}{r},\ \frac{dv}{ds}=-\frac{u}{r}+\frac{w}{\rho},\ \frac{dw}{ds}=-\frac{v}{\rho},$$

且 $u^2+v^2+w^2=1$，则按

$$\frac{u+iv}{1-w}=\frac{1+w}{u-iv}=\sigma,\ \frac{u+iv}{1+w}=\frac{1-w}{u-iv}=-\omega$$

所定义的 σ 及 ω 满足 Riccati 方程

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{i}{2\rho}\left(1+\frac{2\rho}{r}\theta-\theta^2\right).$$

2. 设 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 为 Riccati 方程

$$\frac{d\theta}{ds}=L+2M\theta+N\theta^2$$

的任何四个解，式中的 L,M,N 为 s 的已知函数．证明交比 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ 为常数．

3. 已知平面上一系连续单参数圆族，试决定其直交曲线，且证明四直交曲线与任何圆的四交点有一定交比．

§3. 自然方程

根据以上两节的讨论，一条挠曲线 C 的弧长 s，曲率半径 $r(s)$ 及挠率半径 $\rho(s)$ 都是运动群下的不变量．换言之，当 C 经空间运动移成 $\bar{C}$ 时，$\bar{C}$ 在对应点的弧长，曲率半径及挠率半径仍分别等于 $s, r(s)$ 及 $\rho(s)$．

现在来讨论它的逆问题．设两挠曲线 C 及 $\bar{C}$ 在对应点有相同的弧长 s，曲率半径 $r(s)$ 及挠率半径 $\rho(s)$，问能否寻找一个运动 M 使 $C,\bar{C}$ 互相重合．换句话说，挠曲线的 s，$r(s)$ 及 $\rho(s)$ 在运动群下是否构成不变量的完全系．这问题最初由 E. Cesàro (1896) 解决．

1. 基本定理

基本定理 设 $f(s)$，$\varphi(s)$ 为 s 的两个已知函数，且在所讨论的区间中 $f(s)>0$. 凡是以 s 为弧长，$f(s)$ 为曲率且以 $\varphi(s)$ 为挠率的挠曲线，在运动群下则必互相重合. 换言之，除了这种挠曲线在空间的位置外，它们的形状完全决定.

证明 先假定这种曲线存在. 设 C,C' 为适合上列条件的两条实曲线. 称具有同一 s 值的两点为对应点. 于是依照假设 C,C' 在对应点有相同的曲率 $f(s)$ 及相同的挠率 $\varphi(s)$. 现在于一对应点 O,O' 上各引 C,C' 的切线、主法线及从法线，并决定运动 M 使得 O' 移到 O 且使上面所作的两个三面体合而为一. 经此运动后，C' 应当被移成新曲线 $\overline{C}$. 两曲线 $C,\overline{C}$ 在公共点 O 有相同的切线、主法线及从法线，且在有同一弧长 s 的两点，曲率 $f(s)$ 与挠率 $\varphi(s)$ 亦相同. 倘能证明 $\overline{C}$ 与 C 重合，则定理成立.

不妨假定点 O 的弧长 $s=0$. 设 $C,\overline{C}$ 在对应点的切线、主法线及从法线分别具如下的单位向量

$$\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s);\ \overline{\boldsymbol{T}}(s),\overline{\boldsymbol{N}}(s),\overline{\boldsymbol{B}}(s).$$

根据假设，在 $s=0$ 时有

$$\boldsymbol{T}(0)=\overline{\boldsymbol{T}}(0),\boldsymbol{N}(0)=\overline{\boldsymbol{N}}(0),\boldsymbol{B}(0)=\overline{\boldsymbol{B}}(0).$$

由于 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\overline{\boldsymbol{T}}$、$\overline{\boldsymbol{N}}$、$\overline{\boldsymbol{B}}$ 都满足 Frenet 公式(4)，

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{T}\cdot\overline{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{N}\cdot\overline{\boldsymbol{N}}+\boldsymbol{B}\cdot\overline{\boldsymbol{B}})=0,$$

于是

$$\boldsymbol{T}\cdot\overline{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{N}\cdot\overline{\boldsymbol{N}}+\boldsymbol{B}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}=\text{常数}.$$

然而当 $s=0$ 时 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\overline{\boldsymbol{T}}$、$\overline{\boldsymbol{N}}$、$\overline{\boldsymbol{B}}$ 一致，故得这个常数是3. 因此对于任何 s，

$$\boldsymbol{T}(s)\cdot\overline{\boldsymbol{T}}(s)+\boldsymbol{N}(s)\cdot\overline{\boldsymbol{N}}(s)+\boldsymbol{B}(s)\cdot\overline{\boldsymbol{B}}(s)=3.$$

由此可得

$$(\boldsymbol{T}(s)-\overline{\boldsymbol{T}}(s))^2+(\boldsymbol{N}(s)-\overline{\boldsymbol{N}}(s))^2$$
$$+(\boldsymbol{B}(s)-\overline{\boldsymbol{B}}(s))^2=0,$$

再从实曲线的假设得知

$$\boldsymbol{T}(s)=\overline{\boldsymbol{T}}(s),\boldsymbol{N}(s)=\overline{\boldsymbol{N}}(s),\boldsymbol{B}(s)=\overline{\boldsymbol{B}}(s).$$

因两曲线在对应点有同一弧长s，故由上面的第一式

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{r}(s)-\overline{\boldsymbol{r}}(s))=0,$$

于是

$$\boldsymbol{r}(s)=\overline{\boldsymbol{r}}(s)+\text{常向量}.$$

但当$s=0$时，两点合于O，所以对所有的s

$$\boldsymbol{r}(s)=\overline{\boldsymbol{r}}(s),$$

即

$$C\equiv\overline{C}\equiv M(C').$$

证毕.

2. 存在定理

存在定理 设$f(s)>0$为s的任何连续可微正值函数，$\varphi(s)$为s的任何连续函数，则分别以s，$f(s)$及$\varphi(s)$为弧长，曲率及挠率的挠曲线必定存在，并且在所讨论的s的区域上为正则.

为了证明此定理，必须应用微分方程理论中的存在定理. 为了方便起见，我们引进下面的

引理 设$c_{ik}(s)(i,k=1,2,3)$在区域$0\leqq s\leqq r$为s的连续函数，则微分方程组

$$\frac{du_i}{ds}=\sum_{k=1}^{3}c_{ik}u_k\ \ (i=1,2,3) \tag{1}$$

必有连续解，且各解在$s=0$所取的值u_i^0完全随意.

证明此引理，常用Picard 所创的逐次逼近法，叙述如下：

令

$$u_i^1 = u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k^0 ds,$$

$$u_i^2 = u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k^1 ds, \tag{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_i^n = u_i^0 + \int_0^s \sum c_{ik} u_k^{n-1} ds.$$

设$|c_{ik}| < \frac{1}{3}c$, $|u_i^0| \leqq 1$,

则

$$|u_i^1 - u_i^0| < cs \leqq cr,$$

$$|u_i^2 - u_i^1| \leqq \int_0^s \Sigma |c_{ik}| |u_k^1 - u_k^0| ds$$

$$< c^2 \frac{s^2}{2!} \leqq c^2 \frac{r^2}{2!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|u_i^n - u_i^{n-1}| < c^n \frac{s^n}{n!} \leqq c^n \frac{r^n}{n!}.$$

由于

$$u_i^n = u_i^0 + (u_i^1 - u_i^0) + (u_i^2 - u_i^1) + \cdots + (u_i^n - u_i^{n-1}),$$

所以

$$|u_i^n| \leqq |u_i^0| + |u_i^1 - u_i^0| + |u_i^2 - u_i^1| + \cdots + |u_i^n - u_i^{n-1}|$$

$$< 1 + cr + c^2 \frac{r^2}{2!} + \cdots + c^n \frac{r^n}{n!} < e^{cr}.$$

因此，函数列$\{n_i^n(s)\}$在$0 \leqq s \leqq r$均匀收敛. 根据熟知的定理，极限函数

$$\lim_{n\to\infty} u_i^n(s) = u_i(s)$$

必存在，且$u_i(s)$为 s 的连续函数．当$n\to\infty$时，从(2)得到

$$u_i = u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k ds,$$

即有

$$\frac{du_i}{ds} = \sum_k c_{ik} u_k, \quad u_i(0) = u_i^0. \qquad \text{证毕.}$$

存在定理的证明 如果所求的挠曲线存在，则由对应的$\boldsymbol{T}=(\alpha,\beta,\gamma)$，$\boldsymbol{N}=(l,m,n)$，$\boldsymbol{B}=(\lambda,\mu,\nu)$，它们的分量构成的函数组$(\alpha,l,\lambda)$，$(\beta,m,\mu)$，$(\gamma,n,\nu)$都应该满足下列的微分方程组

$$\begin{aligned}
\frac{du_1(s)}{ds} &= f(s)u_2(s), \\
\frac{du_2(s)}{ds} &= -f(s)u_1(s) + \varphi(s)u_3(s), \\
\frac{du_3(s)}{ds} &= -\varphi(s)u_2(s),
\end{aligned} \tag{3}$$

式中的 u_1,u_2,u_3是待求的未知函数．所以要研究所求的曲线存在与否，必须先阐明微分方程组(3)的解u_1,u_2,u_3 存在与否．根据假设，系数 $f(s),\varphi(s)$ 在所讨论的 s 的区间里皆为连续函数，故从引理可知系统(3)有连续解 u_1,u_2,u_3，它们在 $s=0$ 时取给定的任意初始值 u_1^0,u_2^0,u_3^0.

设(u_1,u_2,u_3)，(u_1',u_2',u_3')是(3)的任何两组解，则

$$\frac{d}{ds}(u_1u_1' + u_2u_2' + u_3u_3') = 0,$$

于是

$$u_1u_1' + u_2u_2' + u_3u_3' = \text{常数}. \tag{4}$$

特别当 $u_i'=u_i(i=1,2,3)$时，得关系式

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \text{常数} \tag{5}$$

另一方面，系统(3)为齐一次微分方程式. 若(u_1, u_2, u_3)为它的一组解,则对任何常数k,(ku_1, ku_2, ku_3)也是解. 故对于(3)的非零解,可适当选取k，使(5)的右端常数化为 1,从而得到满足下列条件的解

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=1. \tag{6}$$

现在取九个常数构成的直交方阵

$$\begin{pmatrix} u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 \\ u_1'^0 & u_2'^0 & u_3'^0 \\ u_1''^0 & u_2''^0 & u_3''^0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

并假定它的行列式为1.

我们可以求系统(3)的三组解 (u_1, u_2, u_3)，(u_1', u_2', u_3')和(u_1'', u_2'', u_3''),使它们在$s=0$时分别取定值(u_1^0, u_2^0, u_3^0)，$(u_1'^0, u_2'^0, u_3'^0)$和$(u_1''^0, u_2''^0, u_3''^0)$. 根据引理,这九个函数都是 s 的连续函数. 又依照(4),(6),(7)易证方阵

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} \tag{8}$$

对于任何 s 值亦为直交阵,且其行列式等于1.

以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(s)=(x(s), y(s), z(s))=\Big(&\int u_1(s)\,ds, \int u_1'(s)\,ds, \\ &\int u_1''(s)\,ds\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

定义一条挠曲线C. 我们将证明C就是所求的曲线.

(i) s 是C的弧长　这是因为从(9)有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^2=u_1^2+u_1'^2+u_1''^2=1.$$

(ii) $f(s)$是C的曲率　由(i)已知 s 为C的弧长,所以C的单

位切向量

$$\boldsymbol{T}=(u_1, u_1', u_1'') \tag{10}$$

关于 s 微分，对上式左端用 Frenet 公式，而对右端则利用(3)的第一式改写，结果应为

$$\frac{1}{r}\boldsymbol{N}=(f(s)u_2, f(s)u_2', f(s)u_2''). \tag{11}$$

两边取模，并注意到$r>0$，$f(s)>0$，故

$$\frac{1}{r}=f(s). \tag{12}$$

(iii) **$\varphi(s)$是C的挠率** 根据(12)，可把(11)改写为

$$\boldsymbol{N}=(u_2, u_2', u_2''). \tag{13}$$

对于曲线C，由$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$的分量所作的方阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & l & \lambda \\ \beta & m & \mu \\ \gamma & n & \nu \end{pmatrix}$$

与(8)有同一性质，而且由(10)及(13)已知它们的第一、二两列元素相同，故第三列元素亦必相同，即

$$\boldsymbol{B}=(u_3, u_3', u_3''). \tag{14}$$

根据$f(s)$是连续可微的假设易知曲线C属于C^3级，因此对(14)微分，再利用 Frenet 公式和(3)的第三式得到

$$-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{N}=(-\varphi(s)u_2, -\varphi(s)u_2', -\varphi(s)u_2''). \tag{15}$$

比较(13)及(15)，即得

$$\frac{1}{\rho}=\varphi(s).$$

证毕.

根据以上讨论，称$\frac{1}{r}=f(s)$，$\frac{1}{\rho}=\varphi(s)$为曲线的**自然方程**.

习　　题

1. 试求曲率及挠率都是常数的挠曲线.

2. 设 $h(t), k(t), l(t)$ 为任何三函数，且 c 为一常数，证明下列挠曲线有一定的挠率：

$$x=c\int\frac{kl'-k'l}{h^2+k^2+l^2}dt,$$

$$y=c\int\frac{lh'-l'h}{h^2+k^2+l^2}dt,$$

$$z=c\int\frac{hk'-h'k}{h^2+k^2+l^2}dt.$$

3. 设两挠曲线 C 及 C_1 以点对点互相对应，且在对应点有平行的切线，则曲率半径 r, r_1 及挠率半径 ρ, ρ_1 必成比例.

这对应称为 Combescure 对应.

4. 设挠曲线 C_1 的弧长 s_1，曲率半径 r_1 及挠率半径 ρ_1 满足关系式

$$\varphi(r_1, \rho_1, s_1)=0.$$

证明 C_1 的方程为

$$\boldsymbol{r}_1(s)=\int F'(s)\boldsymbol{T}(s)ds,$$

式中的 $F(s)$ 依 $\varphi(rF'(s), \rho F'(s), F(s))=0$ 所决定，而 $\boldsymbol{T}(s)$；r, ρ, s 分别为一空间曲线 C 的单位切向量、曲率半径、挠率半径、弧长.

5. 设 a 为大于 1 的常数，试求挠曲线

$$r(\varphi)=\left(\left(a-\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi,\ \left(a-\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi,\quad \cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

的曲率极大点及极小点(Gericke, 1937).

6. 试求 $r^2\rho=$ 常数的挠曲线的方程.

7. 试把 Frenet 公式及自然方程的理论向高维空间中的曲线作推广.

§4. 规范展开　活动标架

1. Bouquet 公式

为了研究挠曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 在其上一点邻近的形状，把这点取为坐标轴的原点 O，并把曲线在 O 的切线，主法线与从法线分别取为 x,

y，z 轴，这应该是比较方便的．这时的坐标平面就由密切平面 $z=0$，法平面 $x=0$ 及从切平面（亦称化直平面）$y=0$ 所构成．

我们不妨假定 O 点的弧长 $s=0$．对充分小的 s，把 $\boldsymbol{r}(s)$ 按有限阶Taylor展开

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(0)+s\boldsymbol{r}'(0)+\frac{s^2}{2!}\boldsymbol{r}''(0)+\frac{s^3}{3!}\boldsymbol{r}'''(0)+\boldsymbol{R},$$

式中的余项 $\boldsymbol{R}=(R_x,R_y,R_z)$ 满足 $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\boldsymbol{R}}{s^3}=\boldsymbol{0}$.

利用 Frenet 公式(§2)

$$\boldsymbol{r}'(s)=\boldsymbol{T},$$

$$\boldsymbol{r}''(s)=\frac{1}{r}\boldsymbol{N},$$

$$\boldsymbol{r}'''(s)=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{T}-\frac{r'}{r^2}\boldsymbol{N}+\frac{1}{r\rho}\boldsymbol{B},$$

若以 r_0,ρ_0,r_0' 分别表示 $r,\rho,\dfrac{dr}{ds}$ 在原点 O 处的值，则

$$\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(0)=\left(s-\frac{1}{6r_0^2}s^3\right)\boldsymbol{T}(0)+\left(\frac{1}{2r_0}s^2-\frac{r_0'}{6r_0^2}s^3\right)\boldsymbol{N}(0)$$

$$+\frac{1}{6r_0\rho_0}s^3\boldsymbol{B}(0)+\boldsymbol{R}.$$

注意到现在坐标系的特殊取法，曲线上点的坐标分量可展开为

$$\begin{aligned}
x(s)&=s&&-\frac{1}{6r_0^2}s^3+R_x,\\
y(s)&=&\frac{1}{2r_0}s^2&-\frac{r_0'}{6r_0^2}s^3+R_y,\\
z(s)&=&&\frac{1}{6r_0\rho_0}s^3+R_z.
\end{aligned}\tag{1}$$

表达式(1)称为曲线在点 O 的规范展开，或称为 Bouquet 公式．我们将利用这公式以研究曲线在 O 点邻近的形状．现在叙述于下．

曲线在点O的密切平面 $z=0$ 上的投影，在第二阶无穷小范围内近似于

$$x=s,\ y=\frac{1}{2r_0}s^2,$$

也就是抛物线 $y=\frac{1}{2r_0}x^2$. 因为以前规定过$r_0>0$(§1.3)，所以主法线的正向确实指向曲线的凹进一侧(图4).

当曲线投影到点O的从切平面$y=0$ 上时，其形状近似于

$$x=s,\ z=\frac{1}{6r_0\rho_0}s^3,$$

即三次平面曲线(图5)

$$z=\frac{1}{6r_0\rho_0}x^3.$$

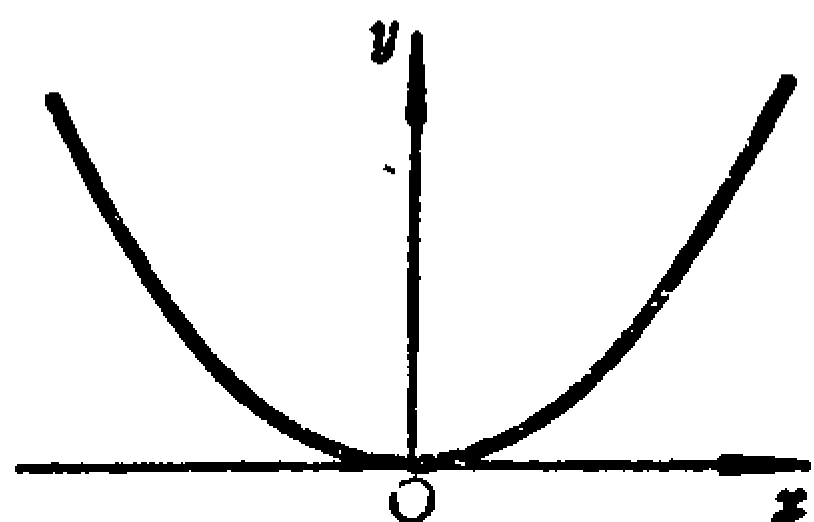


图 4

曲线在点O的法平面$x=0$ 上的投影的形状则近似于三次抛物线(图6)

$$z^2=\frac{2r_0}{9\rho_0^2}y^3.$$

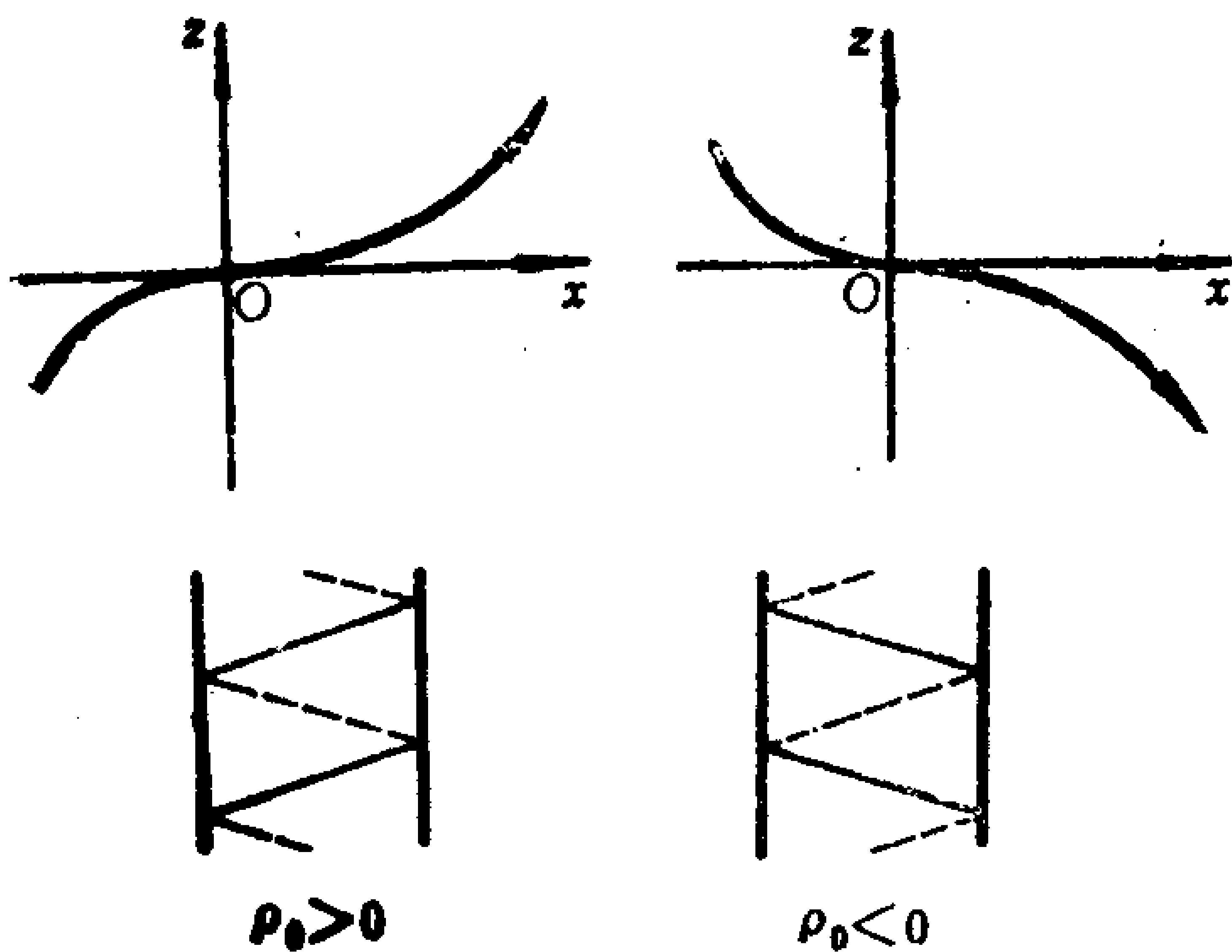


图 5

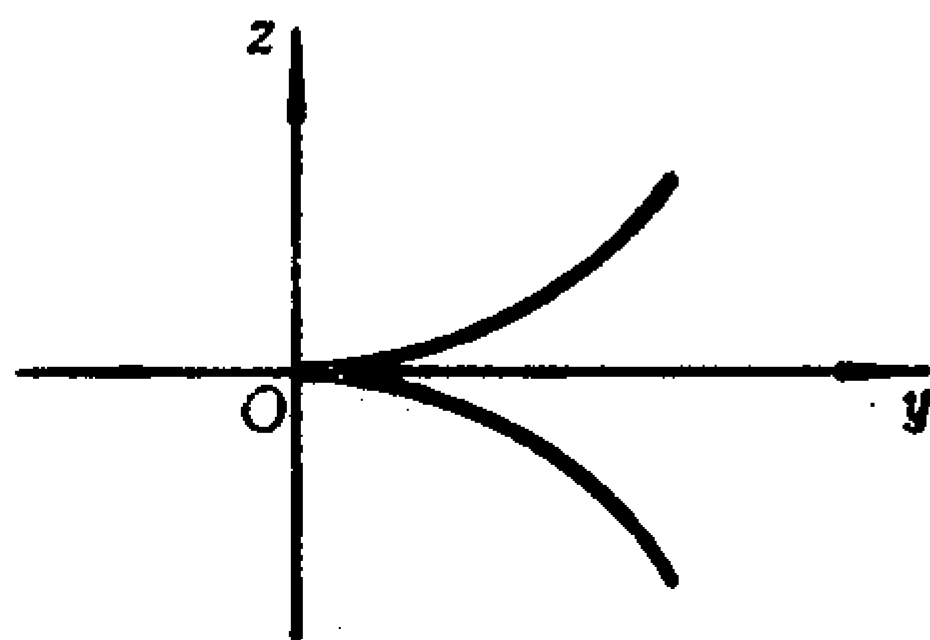


图 6

曲线在各点的切线、主法线及从法线构成一个标架，因为它随点沿曲线的变动而改变其位置，所以通称为活动标架.

2. Cesàro 恒等条件

取曲线上一点$M(s)$为原点，且以其切线、主法线及从法线为三坐标轴时，我们便得到一个标架$\{M\}$，它的三个单位向量是$\boldsymbol{T}(s)$，$\boldsymbol{N}(s)$及$\boldsymbol{B}(s)$．当这标架$\{M\}$开始活动时，这三个向量值函数关于s的导数决定于 Frenet 公式(§2)．

设ξ,η,ζ为空间任何一点关于标架$\{M\}$的坐标；ξ',η',ζ'为同一点关于邻近标架$\{M'\}$的坐标，且M到M'的弧长是Δs(图 7)．

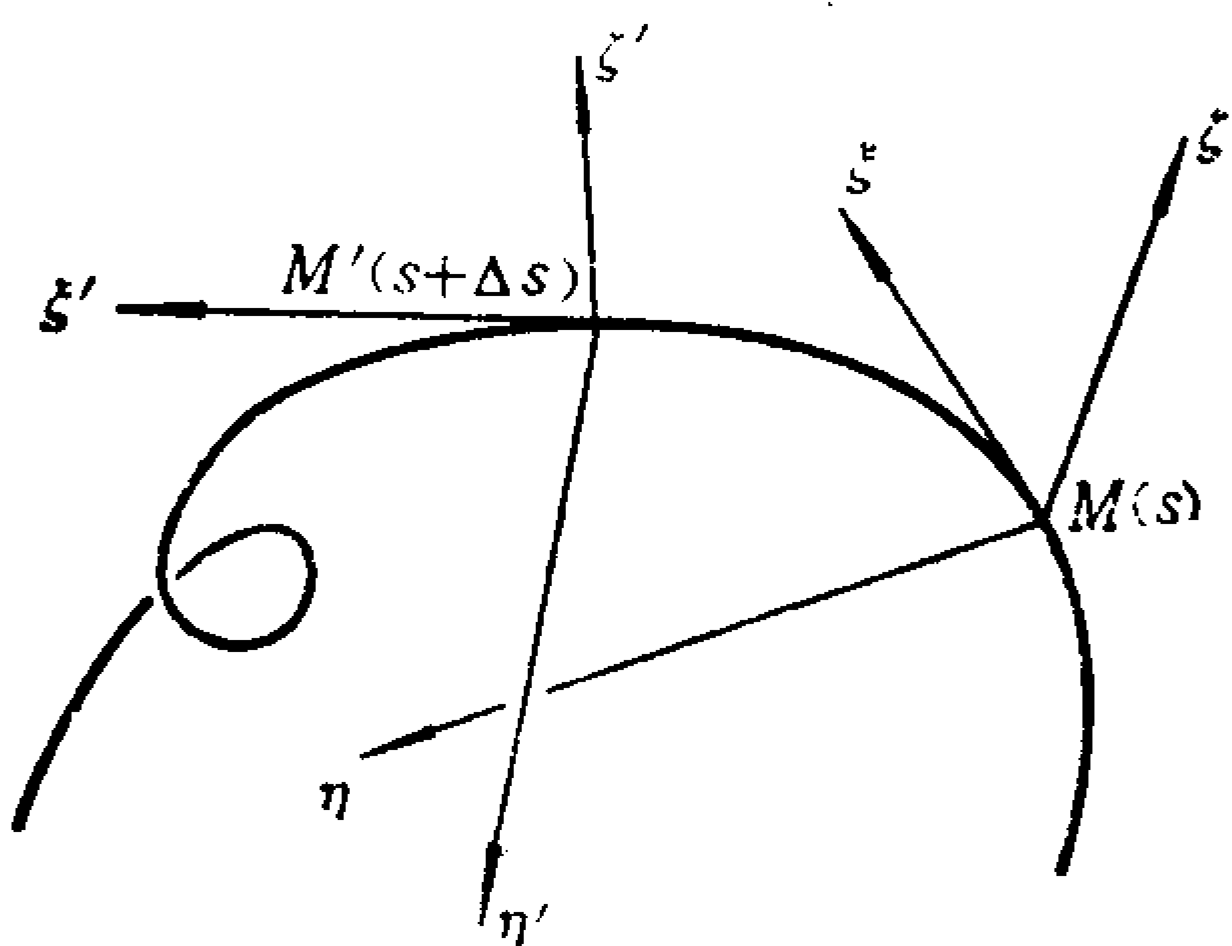


图 7

由于标架$\{M'\}$的三个单位方向$\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$，$\boldsymbol{N}(s+\Delta s)$，$\boldsymbol{B}(s+\Delta s)$在$\Delta s$的一阶无穷小范围内，根据 Frenet 公式可展开为

$$\boldsymbol{T}(s+\Delta s)=\boldsymbol{T}(s)+\frac{\Delta s}{r}\boldsymbol{N}(s),$$

$$\boldsymbol{N}(s+\Delta s)=-\frac{\Delta s}{r}\boldsymbol{T}(s)+\boldsymbol{N}(s)+\frac{\Delta s}{\rho}\boldsymbol{B}(s),$$

$$\boldsymbol{B}(s+\Delta s)=-\frac{\Delta s}{\rho}\boldsymbol{N}(s)+\boldsymbol{B}(s),$$

并由于点M'关于标架$\{M\}$的坐标在Δs的一阶无穷小范围内为$(\Delta s,0,0)$，所以空间中任何点关于这两个标架$\{M\}$，$\{M'\}$的坐标(ξ,η,ζ)与(ξ',η',ζ')之间在Δs的一阶无穷小范围内具有关系

如下：

$$\xi=\Delta s+\xi'-\frac{\Delta s}{r}\eta',$$
$$\eta=\frac{\Delta s}{r}\xi'+\eta'-\frac{\Delta s}{\rho}\zeta',\tag{1}$$
$$\zeta=\frac{\Delta s}{\rho}\eta'+\zeta'.$$

现在取空间一点P，设它关于标架$\{M\}$的坐标为ξ,η,ζ. 当M画曲线C时，点P亦画出一条曲线Γ或固定不动. 在这运动之下，点P一方面对于活动标架有相对运动，另一方面也受到活动标架运动的影响. 设$\{M\}$移到$\{M'\}$时，P移到P'. 设P'关于标架$\{M\}$的坐标为

$$\xi+\Delta_1\xi,\ \eta+\Delta_1\eta,\ \zeta+\Delta_1\zeta,\tag{2}$$

则$\Delta_1\xi,\Delta_1\eta,\Delta_1\zeta$表示$\xi,\eta,\zeta$所受的**绝对增量**. 反之，设$P'$关于标架$\{M'\}$的坐标为

$$\xi+\Delta_2\xi,\ \eta+\Delta_2\eta,\ \zeta+\Delta_2\zeta,\tag{3}$$

则$\Delta_2\xi,\Delta_2\eta,\Delta_2\zeta$表示$\xi,\eta,\zeta$关于活动标架所受的**相对增量**. 将(2)，(3)代入(1)的左右两端，我们在Δs的一阶无穷小范围内容易得出，

$$\xi+\Delta_1\xi=\Delta s+(\xi+\Delta_2\xi)-\frac{\Delta s}{r}(\eta+\Delta_2\eta),$$
$$\eta+\Delta_1\eta=\frac{\Delta s}{r}(\xi+\Delta_2\xi)+(\eta+\Delta_2\eta)-\frac{\Delta s}{\rho}(\zeta+\Delta_2\zeta),$$
$$\zeta+\Delta_1\zeta=\frac{\Delta s}{\rho}(\eta+\Delta_2\eta)+(\zeta+\Delta_2\zeta).$$

改写后，便有

$$\frac{\Delta_1\xi}{\Delta s}=\frac{\Delta_2\xi}{\Delta s}+1-\frac{\eta+\Delta_2\eta}{r},$$

$$\frac{\Delta_1\eta}{\Delta s}=\frac{\Delta_2\eta}{\Delta s}+\frac{\xi+\Delta_2\xi}{r}-\frac{\zeta+\Delta_2\zeta}{\rho},$$

$$\frac{\Delta_1\zeta}{\Delta s}=\frac{\Delta_2\zeta}{\Delta s}+\frac{\eta+\Delta_2\eta}{\rho}.$$

尤其要注意的是，上列三等式是在Δs的无穷小量范围内成立的。所以当M'沿曲线C接近M，即$\Delta s\to 0$时，

$$\begin{aligned}\frac{\delta\xi}{ds}&=\frac{d\xi}{ds}+1-\frac{\eta}{r},\\ \frac{\delta\eta}{ds}&=\frac{d\eta}{ds}+\frac{\xi}{r}-\frac{\zeta}{\rho},\\ \frac{\delta\zeta}{ds}&=\frac{d\zeta}{ds}+\frac{\eta}{\rho},\end{aligned}\tag{4}$$

式中的记号$\frac{\delta\theta}{ds}$表示函数θ的绝对变化率，而$\frac{d\theta}{ds}$则表示同一函数关于活动标架的相对变化率.

上列三等式(4)明确表示了两种变化率间的关系，称为Cesàro恒等条件.

特别当P为固定点时，$\delta\xi=\delta\eta=\delta\zeta=0$，于是得到Cesàro**固定条件**

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{ds}&=\frac{\eta}{r}-1,\\ \frac{d\eta}{ds}&=-\frac{\xi}{r}+\frac{\zeta}{\rho},\\ \frac{d\zeta}{ds}&=-\frac{\eta}{\rho}.\end{aligned}\tag{5}$$

公式(4)是根据 Frenet 公式导出的，与 Frenet 公式相等价. 最初 Cesàro 应用了动力学原理而直接算出(4)式.

Cesàro 的两组条件，尤其是固定条件应用很多. 下面特举一些例子来说明它们的用法.

例 1　求一条挠曲线，使它的密切平面都与定球面相切(Pirondini).

解　设此定球面的中心P关于活动标架的坐标为(ξ,η,ζ)，则它们因为P是空间的固定点而满足(5)式.

但根据假设，P的第三坐标ζ等于球面的半径a，即$\zeta=a$(常数)，所以从(5)的第三式得$\eta=0\left(\frac{1}{\rho}=0\text{则表示平面曲线}\right)$，即点$P$在从切平面上．换句话说，所求曲线的从切平面必经过定点P.因此，所求曲线在一个锥面上且其各点的主法线与锥面在同一点的法线重合，并且其逆亦真．这种曲线是锥面的测地线(参照§21.2).

从(5)还可导出s, r, ρ所满足的关系式.由于此时$\eta=0$, $\zeta=a$，故

$$\xi=a\cdot\frac{r}{\rho}.$$

代入(5)的第一式，

$$a\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{\rho}\right)=-1.$$

于是

$$ar+\rho s=0.$$

例 2　求挠曲线成为球面曲线的条件.

解　设所在球面的中心为定点P；故P关于曲线活动标架的坐标(ξ,η,ζ)必满足(5)．但此球面的半径a应当等于P到曲线上点的距离，即有

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2.$$

两边微分，并用(5)进行化简，易得$\xi=0$．这表示曲线的法平面都经过球面的中心．由(5)又得

$$\eta=r,$$

$$\zeta=\rho\frac{dr}{ds},$$

且

$$\frac{r}{\rho}+\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)=0. \tag{6}$$

反过来，设(6)成立．当我们取$P\left(0,r,\rho\frac{dr}{ds}\right)$时，它必满足(5)，所以为定点．然后微分下式

$$R^2=r^2+\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)^2,$$

有

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}R^2&=2r\frac{dr}{ds}+2\rho\frac{dr}{ds}\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)\\&=2\rho\frac{dr}{ds}\left\{\frac{r}{\rho}+\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)\right\},\end{aligned}$$

依照(6)得$\frac{d}{ds}R^2=0$，所以曲线上任何点至定点P的距离R是常数．因此，(6)是曲线在球面上的充要条件．

习 题

1. 求一条挠曲线，使它的切线与定点的距离为常数．
2. 求一条曲线，使它的法平面常与给定的球面相切．

§5. 密切圆 密切球

凡是以$\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$为中心，$a$为半径的球面，应当有下列的方程表示：

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{m})^2\equiv(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2=a^2,$$

式中的$\boldsymbol{\rho}=(\xi,\eta,\zeta)$表示球面上的动点．现在我们来决定这样一个球面，使它经过曲线上的点$P(x(s),\ y(s),z(s))$和其两个邻近

点. 详细地说，取一个球面使它经过P和曲线上另外的两点Q, R；当Q, R沿曲线接近P时，我们要决定这球面的极限位置. 为此，记此曲线为$\boldsymbol{r}(s)=(x(s), y(s), z(s))$，则在$P$便有

$$f(s)\equiv(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m})^2-a^2=0, \tag{1}$$

$$f'(s)\equiv 2(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m})\boldsymbol{T}(s)=0, \tag{2}$$

$$f''(s)\equiv 2\left\{\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m})\boldsymbol{N}(s)+1\right\}=0. \tag{3}$$

从(2)得知，球面的中心在法平面上. 改写(3)为

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m})\boldsymbol{N}(s)=-r,$$

这表示了，中心在主法线上的正射影到曲线上P点的距离等于曲率半径r.

经过三个定点的球面有∞^1之多，若添加一条件，即球心在P的密切平面上，我们便可决定一个球面，它的中心是

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}(s)+r\boldsymbol{N}(s). \tag{4}$$

这点是曲线的**曲率中心**. 所确定的球面与密切平面相交于一圆，称为**曲率圆**或**密切圆**. 从定义容易知道，曲率圆经过曲线的三个邻近点且其半径等于曲线的曲率半径.

(2),(3)表明：所求的球心在两邻近法平面的交线上. 这直线经过曲率中心(4)且垂直于密切平面，通称为**曲率轴**.

其次，我们来决定一个球面，使它经过曲线上弧长为s的点及其三个邻近点. 设此球面的中心为$\boldsymbol{m}_1=(x_1, y_1, z_1)$，且半径为$R$. 于是球面的方程是

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{m}_1)^2-R^2=0.$$

根据假定得出

$$g(s)\equiv(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)^2-R^2=0,$$

$$\frac{1}{2}g'(s)\equiv(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)\boldsymbol{T}(s)=0,$$

$$\frac{1}{2}g''(s)\equiv\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)\boldsymbol{N}(s)+1=0,$$

$$\frac{1}{2}g'''(s)\equiv-\frac{r'}{r^2}(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)\boldsymbol{N}(s)$$

$$+\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)\left(-\frac{1}{r}\boldsymbol{T}(s)+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{B}(s)\right)=0.$$

改写后，便有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)^2-R^2=0,\\&(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)\boldsymbol{T}(s)=0,\\&(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)\boldsymbol{N}(s)=-r,\\&(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)\boldsymbol{B}(s)=-\rho r'.\end{aligned}\tag{5}$$

为决定球面的中心 $\boldsymbol{m}_1=(x_1,y_1,z_1)$，先来看空间中的任一点 $P(X,Y,Z)$. 如记 $\boldsymbol{R}=(X,Y,Z)$，则 $\boldsymbol{R}$ 相对于曲线在 s 点的活动标架，决定于以下的分解式

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}(s)+A\boldsymbol{T}(s)+B\boldsymbol{N}(s)+C\boldsymbol{B}(s),\tag{6}$$

式中的 (A,B,C) 称为点 P 的**局部坐标**. 由(6)易知

$$\begin{aligned}&A=\boldsymbol{T}(s)\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(s)),B=\boldsymbol{N}(s)\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(s)),\\&C=\boldsymbol{B}(s)\cdot(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(s)).\end{aligned}\tag{7}$$

当 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{m}_1$ 时，从(5)，(7)得到

$$A=0,B=r,C=\rho r'.$$

故所求的球心是

$$\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{r}(s)+r\boldsymbol{N}(s)+\rho r'\boldsymbol{B}(s),\tag{8}$$

且球半径 R 的平方等于

$$R^2=(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{m}_1)^2=r^2+\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)^2.\tag{9}$$

由(8)知道，所确定的球心也在曲率轴上.

这样得到的球面称为曲线在点 s 的**密切球**.

关于 s 微分(8)的两侧，

$$\frac{d\boldsymbol{m}_1}{ds}=\left[\frac{r}{\rho}+\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)\right]\boldsymbol{B}(s), \tag{10}$$

所以密切球心轨迹的切线平行于原曲线在对应点的从法线.

倘若挠曲线在给定球面上，则它的密切球不变，从而密切球的中心与半径也都不变. 从(10)得到为此的必要条件

$$\frac{r}{\rho}+\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)=0,$$

这就是前节的(6)式. 反过来，假定最后的方程成立，则所有的密切球有同一个中心，且由(9)，

$$\frac{d}{ds}R^2=2\rho\frac{dr}{ds}\left[\frac{r}{\rho}+\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{dr}{ds}\right)\right]=0,$$

即所有密切球的半径为常数，于是曲线在固定的球面上. 因此，上述的必要条件也是充分的.

习 题

1. 挠曲线的三条邻近主法线所在的织面(二次曲面)称为**主法线织面**. 试求它的方程.

2. 挠曲线的三条邻近从法线所在的织面称为**从法线织面**. 试求它的方程(方德植 T. C. Fon, 1935).

3. 若挠曲线在其各点的密切平面经过从法线织面的中心，则此中心必与曲率中心重合，且曲线有常挠率. 其逆亦真(方德植 T. C. Fon, 1936).

4. 若挠曲线在其各点的从切平面都经过同一点的主法线织面中心，则曲线必有常挠率，且其逆亦真(方德植 T. C. Fon, 1936).

5. 凡与曲线的四张邻近有向密切平面相切的有向球面称为**对偶密切球**. 证明它的半径等于

$$R=1:\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{\rho}\right),$$

且中心为

$$\boldsymbol{r}=R\left(-\frac{r}{\rho}\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{B}(s)\right).$$

(Hostinsky, 1907; Ranum, 1915, 1928, 1929; 高须鹤三郎 T. Takasu, 1922).

§6. 曲线弧长的第一变分

在研究曲线的微分几何学时，我们常有应用变分学的必要，下面要叙述的就是一个例子.

设 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$ 是一条挠曲线或平面曲线，s 为它的弧长. 另取一条邻近曲线 $\overline{\boldsymbol{r}}(s)=(\bar{x}(s),\bar{y}(s),\bar{z}(s))$，且把它表示为

$$\overline{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{r}(s)+u\boldsymbol{T}(s)+v\boldsymbol{N}(s)+w\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{\rho}, \tag{1}$$

式中的 $\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)$ 意义如前，是曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的活动标架的单位向量；u,v,w 皆为 s 的函数，且

$$u=\varepsilon\bar{u}(s),\ v=\varepsilon\bar{v}(s),\ w=\varepsilon\bar{w}(s), \tag{2}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，曲线 $\overline{\boldsymbol{r}}(s)$ 就趋于曲线 $\boldsymbol{r}(s)$. 从 $s=s_1$ 到 $s=s_2$ 的曲线 $\overline{\boldsymbol{r}}(s)$ 弧长为

$$\bar{s}=\int_{s_1}^{s_2}\left|\frac{d\overline{\boldsymbol{r}}(s)}{ds}\right|ds. \tag{3}$$

若将 $\bar{s}$ 关于 ε 作有限阶的 Taylor 展开

$$\bar{s}=s+\delta s+o(\varepsilon),$$

其中

$$\delta s=\varepsilon\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{s}-s}{\varepsilon} \tag{4}$$

是 ε 的一次式，称为曲线弧长的**第一变分**.

为计算 δs 起见，以

$$\kappa=\frac{1}{r},\qquad \sigma=\frac{1}{\rho}$$

分别表示曲率及挠率，这时 Frenet 公式(§2)则可改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}'&=\kappa\boldsymbol{N},\\ \boldsymbol{N}'&=-\kappa\boldsymbol{T}+\sigma\boldsymbol{B},\\ \boldsymbol{B}'&=-\sigma\boldsymbol{N}.\end{aligned} \tag{5}$$

若记 $\boldsymbol{\rho}=u\boldsymbol{T}+v\boldsymbol{N}+w\boldsymbol{B}=\varepsilon(\bar{u}\boldsymbol{T}+\bar{v}\boldsymbol{N}+\bar{w}\boldsymbol{B})=\varepsilon\bar{\boldsymbol{\rho}}$，从(1)及(5)可得

$$\boldsymbol{\rho}'=\varepsilon\bar{\boldsymbol{\rho}}'=(u'-\kappa v)\boldsymbol{T}+(v'+u\kappa-w\sigma)\boldsymbol{N}+(w'+v\sigma)\boldsymbol{B}, \quad (6)$$

然而

$$\bar{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\rho}',$$

故

$$\bar{\boldsymbol{r}}'\cdot\bar{\boldsymbol{r}}'=1+2\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\rho}'+o(\varepsilon).$$

于是

$$\frac{d\bar{s}}{ds}=\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}\right|=1+\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\rho}'+o(\varepsilon)$$
$$=1+(u'-\kappa v)+o(\varepsilon).$$

因此

$$\bar{s}=s+\int_{s_1}^{s_2}(u'-\kappa v)ds+o(\varepsilon).$$

这样，我们得到

$$\delta s=u\Big|_{s_1}^{s_2}-\int_{s_1}^{s_2}\kappa v ds. \quad (7)$$

因为 δs 与 w 无关，故对于 $u=v=0$ 及任何函数 $w=\varepsilon\bar{w}$，δs 常消灭，换句话说，

在曲线上各点，沿从法线方向随意变更曲线，其弧长的变动是稳定的，且其逆亦真.

若两曲线 $\boldsymbol{r}$ 及 $\bar{\boldsymbol{r}}$ 有公共端点，于是 $u(s_1)=u(s_2)=0$，则

$$\delta s=-\int_{s_1}^{s_2}\kappa v ds. \quad (8)$$

原来 $v=\varepsilon\bar{v}$ 表示曲线沿主法线方向的微小变差，现改用 δn 表示. 这时

$$\delta s=-\int_{s_1}^{s_2}\kappa\delta n ds. \quad (9)$$

§7. 平面曲线 等周问题

1. 平面曲线

当一条曲线在各点的挠率等于0时，必为平面曲线，且其逆亦真(参照§1，例2). 以下为方便起见，取曲线所在的平面为 xy 平面，即 $z=0$，而且简记

$$\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),0)=(x(s),y(s))$$

为它的解析表示，于是

$$s=\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \tag{1}$$

为弧长；

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} \tag{2}$$

为曲率. 又改写 Frenet 公式为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{T},\quad \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\frac{1}{r}\boldsymbol{N},\quad \frac{d\boldsymbol{N}}{ds}=-\frac{1}{r}\boldsymbol{T}. \tag{3}$$

设 φ 表示 x 轴的正向与切线正向的交角(图8)，则

$$\boldsymbol{T}=(\cos\varphi,\ \sin\varphi);\quad (4)$$

$$\boldsymbol{N}=(-\sin\varphi,\ \cos\varphi).$$

由此易得

$$\frac{1}{r}=\frac{d\varphi}{ds}. \tag{5}$$

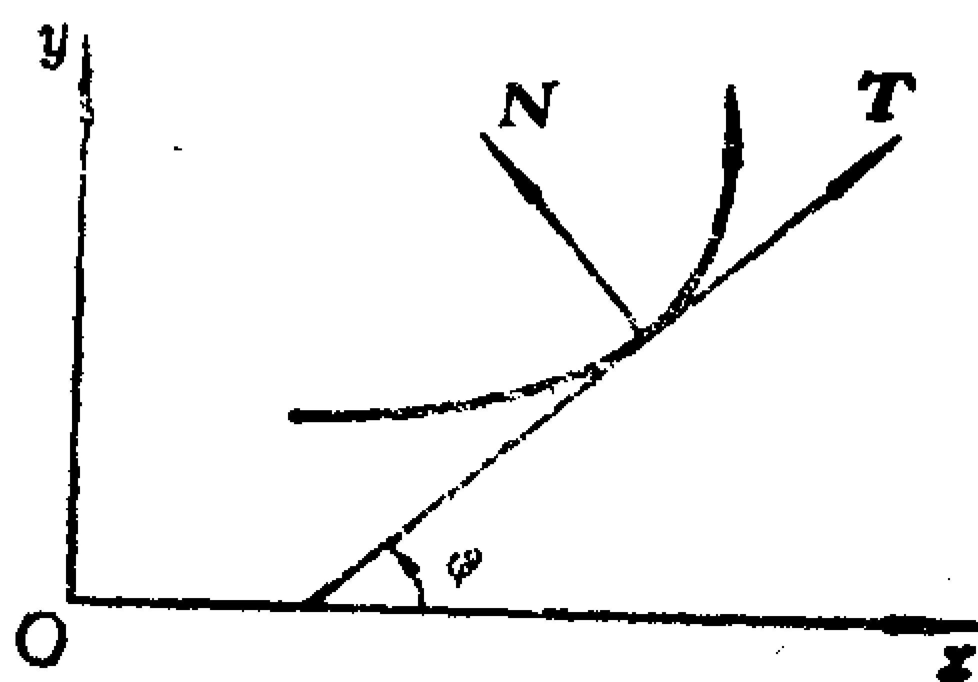


图 8

习 题

1. 试述平面曲线的基本定理及存在定理.
2. 直接导出平面曲线论的 Cesàro 恒等条件及固定条件.
3. 若平面曲线的曲率为常数，则必为圆弧或直线段.

4. 试求下列诸曲线的自然方程：椭圆，摆线(cycloid)，外摆线(epicycloid)，内摆线(hypercycloid)，对数螺线.

5. 若平面曲线的法线经过定点，则必为圆弧.

6. 证明平面曲线在其一点 O(原点)的规范展开为

$$y=\frac{\kappa}{2}x^2+\frac{\kappa'}{6}x^3+\frac{1}{24}(\kappa''+3\kappa^3)x^4+o(x^4), \tag{6}$$

式中，κ 为曲线在 O 的曲率，$\kappa'=\left(\frac{d\kappa}{ds}\right)_0$，$\kappa''=\left(\frac{d^2\kappa}{ds^2}\right)_0$.

7. 试从(6)决定曲线在 O 的密切圆锥曲线的方程.

8. 由点 O 引密切圆锥曲线的直径(称为曲线在 O 的**仿射法线**). 证明它的方程为

$$\frac{1}{3}\frac{\kappa'}{\kappa^2}y+x=0. \tag{7}$$

9. 若平面曲线在各点有公共法线及仿射法线，则必为圆弧(Salkowski).

10. 若平面曲线在各点的法线与仿射法线相交于定角，则必为对数螺线(窪田 T. Kubota).

11. 设两平面曲线 C 及 $\overline{C}$ 相切于点 O，且在 O 的曲率分别为 κ 及 $\overline{\kappa}$. 证明比 $\kappa:\overline{\kappa}$ 是射影不变量(Mehmke, Segre).

12. 设原点为一条平面曲线的节点，而且曲线关于角度是 θ 的斜交坐标轴的方程是

$$2xy=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+\cdots.$$

证明曲线在 O 的二枝各有曲率

$$\frac{1}{R_1}=a\sin\theta,\quad \frac{1}{R_2}=d\sin\theta.$$

2. 卵形线

在平面曲线族中，**卵形线**或**凸闭曲线**是特别有趣味的一种曲线，它的定义如下：

设 M 为平面上的一个点集. 若 M 为有界，而且 M 中的任何两点的连线上的任何点也属于 M，则 M 称为**卵形域**，而且 M 的境界称为**卵形线**或凸闭曲线

从定义易知，三角形，凸多角形，圆，椭圆等都是卵形线. 最一般的卵形线的曲率不一定存在，甚至其切线方向的变更不一定是连续的. 可是对微分几何学中所论的卵形线，不仅假定曲率处处存在，还假定曲率的连续性. 这种卵形线称为**正则**卵形线. 以后如无特别声明，都理解为正则的.

对于卵形线的研究常用一种特殊坐标，即所谓**切线极坐标**. 现在说明于下.

我们这样规定卵形线的**正方向**，使得沿曲线的正方向绕一周时，卵形域始终在曲线的左侧. 沿正方向的切线称为**正向切线**. 设角度 φ 的意义如前，则弧长 s 是 φ 的严格递增函数 $(0\leqq\varphi<2\pi)$，所以

$$r=\frac{ds}{d\varphi}>0. \tag{1}$$

现在对卵形线 C 上任何一点 P 引正向切线，设其与 x 轴正向的交角为 φ. 从原点 O 引此切线的垂线，设其距离为 p(图 9)，则 p 是 φ 的函数 $p(\varphi)$，且切线的方程为

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi=p(\varphi), \tag{2}$$

于是 C 被看成为切线族的包络线.

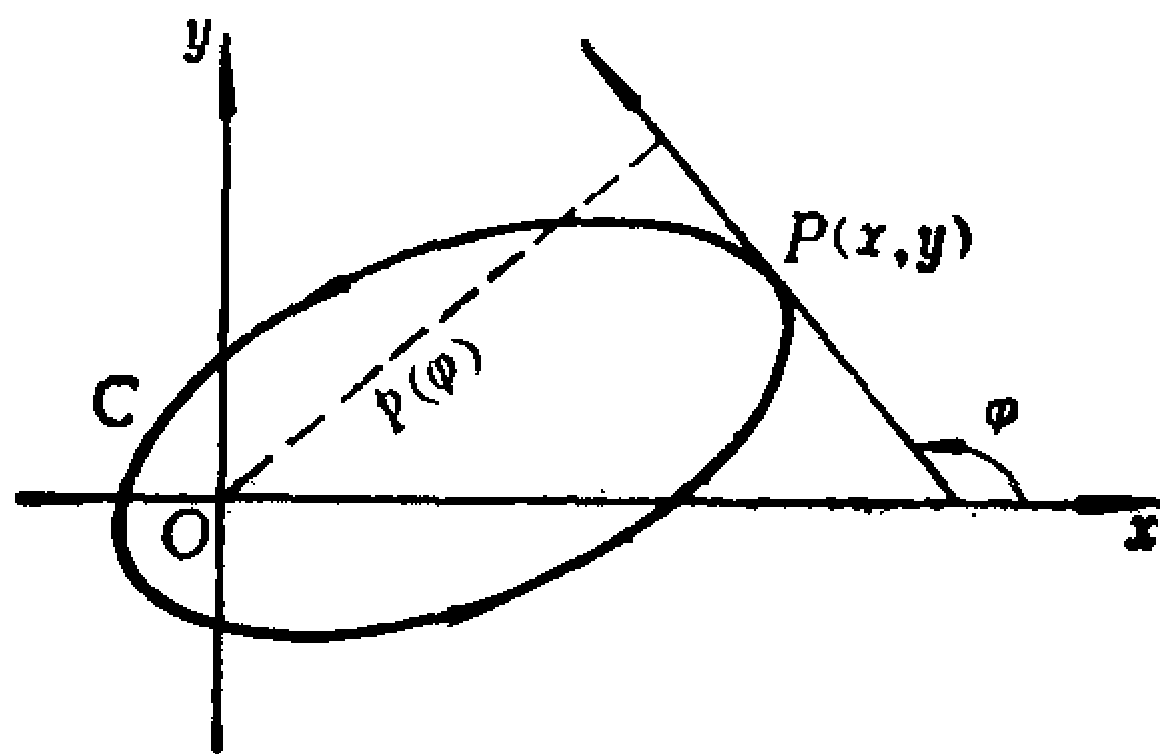


图 9

为了决定 C 与切线(2)的切点 P，我们作(2)的两侧关于 φ 偏微分

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=p'(\varphi). \tag{3}$$

由(2)及(3)解得

$$x(\varphi)=p(\varphi)\sin\varphi+p'(\varphi)\cos\varphi,$$
$$y(\varphi)=-p(\varphi)\cos\varphi+p'(\varphi)\sin\varphi. \tag{4}$$

由此可见,已知 φ 及 $p(\varphi)$ 即可决定卵形线上的点 $P(x,y)$,且其逆亦真. 所以 (φ,p) 称为曲线点的**切线极坐标**.

关于 φ 微分(4),

$$\frac{dx}{d\varphi}=[p(\varphi)+p''(\varphi)]\cos\varphi, \tag{5}$$
$$\frac{dy}{d\varphi}=[p(\varphi)+p''(\varphi)]\sin\varphi.$$

于是得出曲率半径的一个重要公式:

$$r=p(\varphi)+p''(\varphi). \tag{6}$$

因为卵形线为封闭曲线,故 $p(\varphi)$ 是 φ 的周期函数且周期等于 2π. 另外,凸的条件(1)变为

$$p(\varphi)+p''(\varphi)>0 \quad (0\leqq\varphi<2\pi). \tag{7}$$

设 L 为 C 的周长,则

$$L=\oint ds=\int_0^{2\pi}\frac{ds}{d\varphi}d\varphi=\int_0^{2\pi}[p(\varphi)+p''(\varphi)]d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}p(\varphi)d\varphi+p'(\varphi)\Big|_0^{2\pi}.$$

然而 $p'(\varphi)$ 也是 φ 的周期函数且周期等于 2π, 故 $p'(0)=p'(2\pi)$. 因此得到 Cauchy 公式:

$$L=\int_0^{2\pi}p(\varphi)d\varphi. \tag{8}$$

设 F 为 C 所包围的面积,则

$$F=\frac{1}{2}\oint p(\varphi)ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(\varphi)\frac{ds}{d\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(\varphi)[p(\varphi)+p''(\varphi)]d\varphi.$$

但是

$$\int_0^{2\pi}p(\varphi)p''(\varphi)d\varphi=[p(\varphi)p'(\varphi)]\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}p'^2(\varphi)d\varphi,$$

这样,就成立了 Blaschke 公式:

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[p^2(\varphi)-p'^2(\varphi)]d\varphi. \tag{9}$$

对于任何正的常数 n 作一条曲线 C_n, 使 C_n 在卵形线 C 的外部且对应于同一正向的两条切线之间的距离等于 n. 那末, 所作的曲线 C_n **必为卵形线**. 实际上, 设 $(\varphi, p_n(\varphi))$ 为 C_n 的切线极坐标,则

$$p_n(\varphi)=p(\varphi)+n. \tag{10}$$

于是从(6)得 C_n 的曲率半径 r_n 为

$$r_n=r+n. \tag{11}$$

从(10)得知 $p_n(\varphi)$ 也为 φ 的周期函数,其周期等于 2π, 且根据(1)及 $n>0$ 得到 $r_n>0$, 所以 C_n 是凸闭曲线.

设 C_n 的周长及面积分别为 L_n 及 F_n, 则按照(8)及(10)得到

$$L_n=\int_0^{2\pi}p_n(\varphi)d\varphi=L+2n\pi. \tag{12}$$

从(9)得到

$$F_n=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(p(\varphi)+n)^2-p'^2(\varphi)]d\varphi$$

$$=F+n\int_0^{2\pi}p(\varphi)d\varphi+\frac{1}{2}n^2\int_0^{2\pi}d\varphi,$$

即

$$F_n=F+nL+n^2\pi. \tag{13}$$

(12)及(13)称为 Steiner 公式;C_n 称为 C 的**平行曲线**.

3. 等周问题

在平面上所有周长相等的封闭曲线族中，问何种曲线所围的区域有最大的面积，这就是自古以来称为**等周问题**的著名问题．下面我们先来作初步研究．

从一封闭曲线变成邻近曲线时，它的周长及所围面积F的第一变分应当为

$$\delta L = -\oint \kappa v ds, \tag{1}$$

$$\delta F = -\oint v ds. \tag{2}$$

式中 $v=\varepsilon\bar{v}(s)$ 表示曲线沿法线正方向的微小变差，且这里的面积由普通微积分学所定义，即按区域在曲线的左右侧而决定其正负．

根据变分学理论，取一个周期为 L 的函数 $v(s)$；若曲线C是等周问题的解，则从 $\delta L=0$ 常可导出 $\delta F=0$．

从(1)及(2)易知，$\kappa=$常数是充分条件．今将证明这也是必要条件．因为，假定 $\kappa(s)$在区域 $0\leqq s<L$ 是 s 的连续函数，并且在 $0<s_1<s_2<L$，$\kappa(s_1)=\kappa_1$与$\kappa(s_2)=\kappa_2$ 不相等．若取下图所示的函数 $v(s)$（其他部分可按它的周期作延拓），则

$$\oint v(s)ds \doteq \delta(h_1+h_2),$$

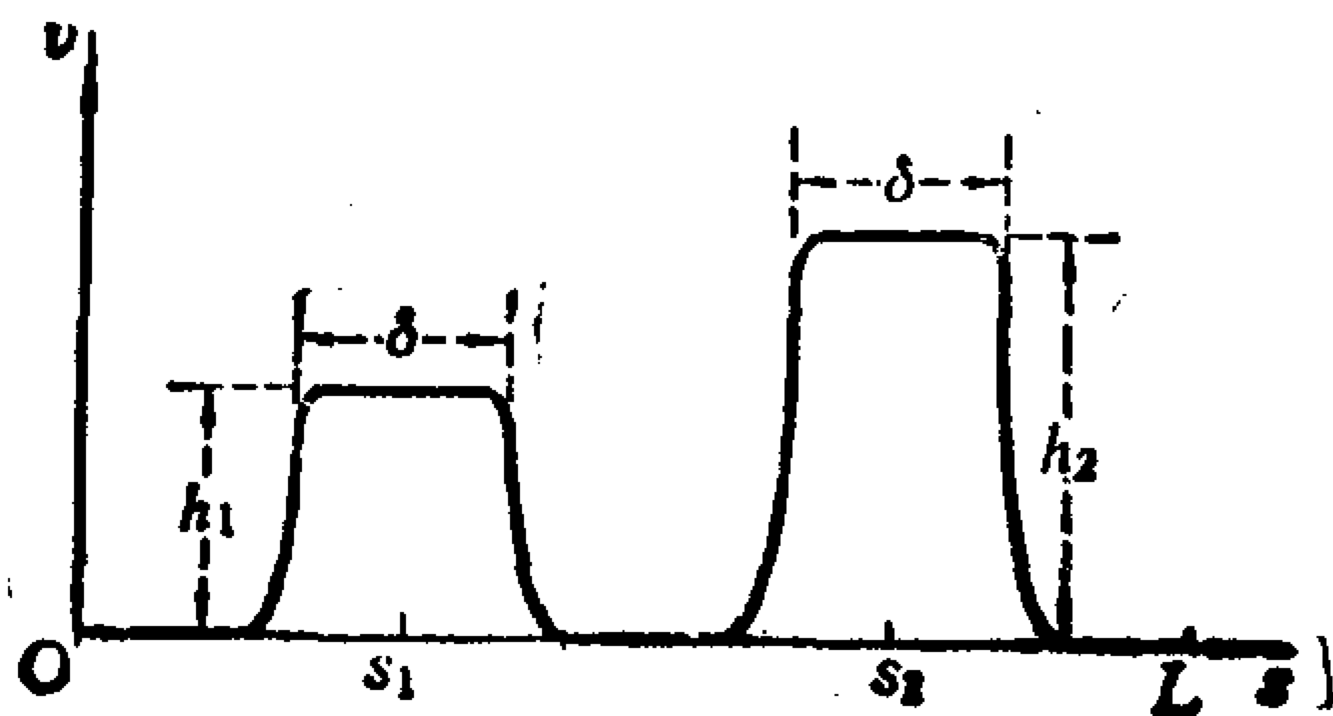


图　10

$$\oint \kappa v(s)ds \doteq \delta(\kappa_1 h_1 + \kappa_2 h_2).$$

由于按假定 $\kappa_1 \neq \kappa_2$，所以我们可决定 h_1 及 h_2 使 $\delta L=0$，而使 $\delta F \neq 0$. 换句话说，在所选的函数 $v(s)$ 之下无法从 $\delta L=0$ 导出 $\delta F=0$. 于是在假定 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ 之下，曲线 C 不得成为等周问题的解. 因此，我们有:

若等周问题的解存在，则必为圆($\kappa=$常数).

等周问题至此似乎已完全解决，然而存在性未经证明，还不能断定圆是它的解答. 关于这方面的历史可参考 W. Blaschke 著的书 Kreis und Kugel(1916)①. 下面，我们仅就近三四十年来对于这个著名问题的解答研究中，摘录两三种，以供读者参考.

(i) Crone 及 Frobenius **定理**. *设 L 为任何卵形线的周长而 F 为它围成区域的面积，则必成立*

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0, \tag{3}$$

并且等号对且仅对圆周成立.

本定理的证明最初是 C. Crone(1904)创立的，后来 G. Frobenius(1915)有过独立研究，所以用他们两人命名. 到今为止证明的人很多. 本文仍按照他们两人用的初等方法，叙述如下.

设 C 为卵形线，C_n 为它的一条平行卵形线，C^* 为正定向的单位圆. $\mathscr{D}$ 为 C 的一个外切三角形，$\mathscr{D}_n$，$\mathscr{D}^*$ 分别为 C_n，C^* 的外切三角形且它们的三边都平行于 $\mathscr{D}$ 的三边. 从 C 的任何一点引正向切线，与 $\mathscr{D}$ 的一边有最初的交点. 设从切点至此交点的距离为 $t(\varphi)$，其中 φ 的意义如前. 对于 C_n 及 C^* 各引对应切线，设对应距离顺次为 $t_n(\varphi)$，$t^*(\varphi)$. 又设三角形 $\mathscr{D}$，$\mathscr{D}_n$，$\mathscr{D}^*$ 的面积分别为 D, D_n, D^*；曲线 C, C_n, C^* 所围区域的面积顺次为 $F, F_n, F^*(=\pi)$；

① 本书新订版 (1955/56) 有中译本 (《圆与球》，苏步青译)，上海科技出版社 (1986 年).

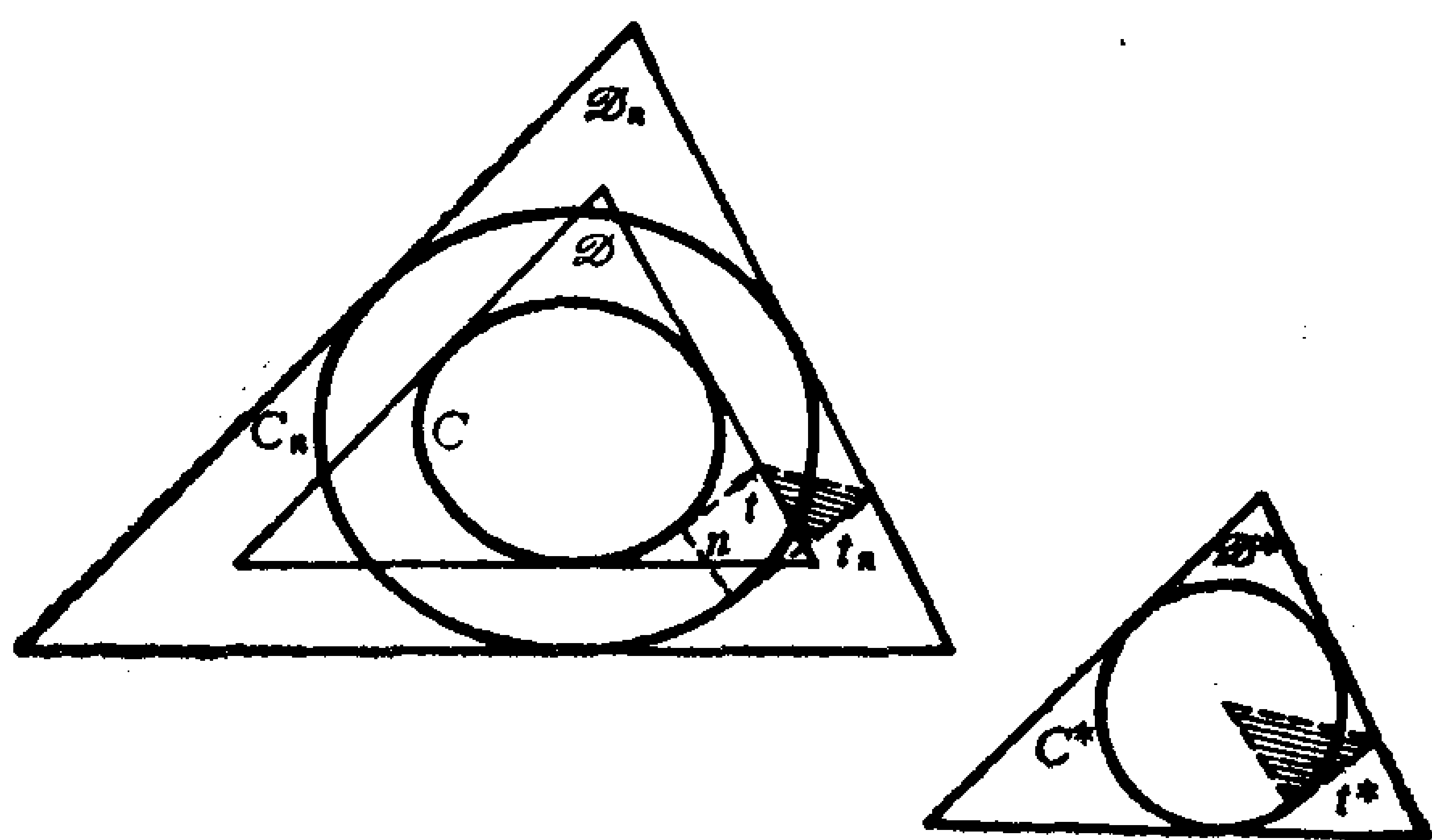


图 11

且 $\mathscr{D}$ 的内切圆半径为 r，则

$$t_n = t(\varphi) + nt^*,$$

$$F_n = D_n - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} t_n^2 d\varphi,$$

$$F_n = (n+r)^2 D^* - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (t+nt^*)^2 d\varphi. \quad (4)$$

然而按照 Steiner 公式，

$$F_n = F + nL + n^2\pi. \quad (5)$$

这是 n 的二次式. 当 $n=0$ 时，F_n 取正值 F. 当 $n=-r$ 时，根据(4)得

$$F_n = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (t-rt^*)^2 d\varphi \leqq 0,$$

就是说：

$$F + nL + n^2\pi = 0$$

的两根为实数，于是

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0,$$

这就是希望证明的不等式(3).

我们必须考察一下等号究竟何时成立.

假定对于所讨论的曲线 C，

$$L^2-4\pi F=0. \tag{6}$$

这表示二次式 $F+nL+n^2\pi$ 恰好是完全平方，故必定是 n 的非负二次式．但当 $n=-r$ 时，

$$F_n=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(t-rt^*)^2d\varphi\leq 0,$$

即此时 F_n 所取的值又不能为正，所以只能取零值．换言之，

$t:t^*=r$，即 $\mathscr{D}$ 的内切圆半径．

现在保留 $\mathscr{D}$ 的两边而变动它的第三边，但必须仍与 C 相切．对于这新的外切三角形 $\mathscr{D}_1$，必有无数条切线使对应的距离 t^*，t 的值与原三角形 $\mathscr{D}$ 时相同．而这时 $t:t^*$ 又必须等于 $\mathscr{D}_1$ 的内切圆半径 r_1，所以 $r_1=r$．换句话说，$\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}_1$ 有公共的内切圆．由此可见，当 $\mathscr{D}$ 的第三边更动时，它既切于曲线 C，又必须切于 $\mathscr{D}$ 的内切圆，所以 C 非重合于此内切圆不可．另外，等式(6)对于圆周是显然成立的．所以，等式(6)对且仅对圆周成立．

特别要注意的是，上列证明不适用于有角点及直线段的卵形线．读者可参阅 H. Liebmann, Math. Zeits.，第 4 卷，1919，288—294 页．

(ii) **Hurwitz 的证明**　A. Hurwitz 最早(1902) 把三角级数应用到几何学，并证明了最一般的等周定理．下面是他证明的概要．

设两函数

$$x=x(s),\ y=y(s),\quad (0\leq s\leq L)$$

表示一条连续封闭曲线，且假定此曲线为可求长，即弧长 s 存在．作变量代换

$$u=\frac{2\pi}{L}s,$$

其中 L 为曲线的周长，则 x 与 y 都是 u 的周期函数，且周期等于

2π，于是得到 Fourier 级数的展开式

$$
\left.\begin{aligned}
x&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ku+a_k'\sin ku),\\
y&=\frac{1}{2}b_0+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos ku+b_k'\sin ku).
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

根据 H. Lebesgue 的理论，凡可求长的曲线，它的点坐标 $x(s), y(s)$ 的导函数必存在，且它的 Fourier 级数如下：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{du}&\sim\sum_{k=1}^{\infty}k(a_k'\cos ku-a_k\sin ku),\\
\frac{dy}{du}&\sim\sum_{k=1}^{\infty}k(b_k'\cos ku-b_k\sin ku).
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

(1)式左端的函数根据假定为连续，故其 Fourier 级数收敛，而且等号成立．至于(2)式则不然，右端级数未必收敛，仅代表各函数的形式 Fourier 级数而已．

因 s 为曲线弧长，

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

从而

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2\right\}du=\frac{1}{2\pi}L^2. \tag{3}$$

我们要应用三角级数论中的 Parseval **定理**：设函数 $f(u)$ 的 Fourier 级数为

$$f(u)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos ku+\alpha_k'\sin ku),$$

且 $|f(u)|^2$ 在 Lebesgue 意义下可积分，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(u)\,du = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \alpha_k'^2). \tag{4}$$

推广后，则可得下列定理：由

$$f(u) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos ku + \alpha_k' \sin ku),$$

$$g(u) \sim \frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k \cos ku + \beta_k' \sin ku),$$

应当成立

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(u)\,du = \frac{1}{2}\alpha_0\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\beta_k + \alpha_k'\beta_k'). \tag{5}$$

从(2)，(3)，(4)先得

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2 + b_k^2 + a_k'^2 + b_k'^2) = 2\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \tag{6}$$

再定义封闭曲线的面积为

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} x\frac{dy}{du}\,du. \tag{7}$$

按照(1)，(2)，(5)得

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}k(a_k b_k' - a_k' b_k) = F. \tag{8}$$

合用(6)及(8)，可得

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \pi\sum_{k=1}^{\infty}\{(ka_k - b_k')^2 + (ka_k' + b_k)^2 + (k^2-1)(b_k^2 + b_k'^2)\}. \tag{9}$$

所以

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0.$$

由(9)的右端易知，上式中等号限于

$$a_1'+b_1=0,\ a_1-b_1'=0,$$
$$a_k=a_k'=b_k=b_k'=0 \quad (k=2,3,\cdots) \tag{10}$$

时成立. 然而这时曲线(1)为

$$x=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos u+a_1'\sin u,$$

$$y=\frac{1}{2}b_0-a_1'\cos u+a_1\sin u.$$

即为一圆周. 因此得到

定理 设一条平面曲线为封闭曲线且可求长, 则其周长 L 与所围面积 F 之间必存在关系式

$$L^2-4\pi F\geqq 0, \tag{11}$$

等号对且仅对圆周成立.

注意, 关于等周问题及其有关问题近年来研究较多, 不胜枚举. 其中对于等周问题不等式的改进, 以 T. Bonnesen(1924) **定理**为最著名:

设 L, F 为任何一条卵形线的周长及所围面积; r 为该卵形线内所含的最大圆的半径, 且 R 为把这卵形线包含在其内的最小圆半径, 则

$$L^2-4\pi F\geqq 4\pi(R-r)^2, \tag{12}$$

等号对且仅对圆周成立.

这定理的证明可参阅

T. Bonnesen, Les problemes des isopérimetres et des isopiphanes, Paris(1929)(1955年新版).

W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Erste Heft, Teubner(1935).

关于凸体论的文献还可参考

T. Bonnesen-W. Fenchel, Theorie der konvexen körper (1933).

§8. 特殊挠曲线

1. 一般螺线

定义 设挠曲线的切线始终与定方向成一定角度，则称此挠曲线为**一般螺线**或**定倾曲线**.

例如，平面曲线，普通螺线都属于这族曲线. 古时候对此作过研究的学者有 Lancret(1820), Saint-Venant(1848), Bertrand(1848)等.

设固定方向的单位向量是 $\boldsymbol{u}$，定角为 θ，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\cos\theta.$$

关于弧长s微分，利用Frenet公式(§2)在曲率$\kappa=\frac{1}{r}\neq 0$时，便有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}=0.$$

所以曲线的主法线始终与固定方向垂直. 因此可写出

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{B}=\pm\sin\theta.$$

再关于 s 微分这等式，

$$\boldsymbol{u}\cdot\left(-\frac{1}{r}\boldsymbol{T}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{B}\right)=0,$$

即

$$-\frac{\cos\theta}{r}\pm\frac{\sin\theta}{\rho}=0,$$

$$\frac{r}{\rho}=\pm\operatorname{ctg}\theta.$$

就是：**对曲率不等于零的一般螺线，它的挠率与曲率的比是常值.**

反过来，若曲率非零的曲线在各点的挠率与曲率的比是常值 k，则必为一般螺线.

证明. 取 θ 使 $\operatorname{ctg}\theta=k(0<\theta<\pi)$. 取向量

$$\boldsymbol{u}=\cos\theta\boldsymbol{T}+\sin\theta\boldsymbol{B}.$$

关于 s 微分，利用 Frenet 公式和假设条件 $\frac{1}{\rho}=\operatorname{ctg}\theta\cdot\frac{1}{r}$,

$$\boldsymbol{u}'=\cos\theta\cdot\frac{1}{r}\boldsymbol{N}-\sin\theta\cdot\frac{1}{\rho}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{u}$ 是固定方向. 显然有 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\cos\theta$. 因此，曲线为一般螺线。

证毕.

方程 $\frac{1}{\rho}:\frac{1}{r}=$ 常数称为一般螺线的**特征方程**.

现在把一般螺线上的各点向固定方向 $\boldsymbol{u}$ 的任一垂直平面上作射影. 设正射影为 $\bar{\boldsymbol{r}}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 一般螺线仍记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 如果所取的垂直平面为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\rho}=0,$$

则

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}.$$

于是得

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}=\boldsymbol{T}-\cos\theta\boldsymbol{u},$$

$$\frac{d^2\bar{\boldsymbol{r}}}{ds^2}=\frac{1}{r}\boldsymbol{N},$$

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2=\left|\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}\right|^2=\sin^2\theta,$$

$$\bar{s}=\pm\sin\theta\cdot s$$

因此

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{N},\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{r}.$$

综合之，则为

定理 一般螺线在其固定方向的垂直平面上的正射影曲线与

原曲线有对应的平行主法线，两弧长之比为常数$(=\pm\sin\theta)$，且两曲率之比亦为常数$\left(=\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$.

我们从这定理便可证明：

Enneper **定理** 若一条一般螺线在一个球面上，则它在其对应的定方向的垂直平面上的正射影曲线必为外摆线.

证明 根据假定，

$$\rho=\pm r\cdot\operatorname{tg}\theta,\quad \left(\rho\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2=R^2.$$

消去ρ得

$$r^2\left\{1+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\operatorname{tg}^2\theta\right\}=R^2,$$

$$\frac{dr}{ds}=\pm\operatorname{ctg}\theta\cdot\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r},$$

$$\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}\operatorname{tg}\theta=\pm ds.$$

积分后有

$$s=\mp\operatorname{tg}\theta\cdot\sqrt{R^2-r^2},$$

即

$$r^2=R^2-s^2\operatorname{ctg}^2\theta.$$

但是正射影曲线的曲率半径

$$\bar{r}=r\sin^2\theta,$$

且弧长

$$\bar{s}=\pm\sin\theta\cdot s.$$

所以

$$\bar{r}^2=R^2\sin^4\theta-\bar{s}^2\cos^2\theta,$$

这恰好是外摆线的自然方程.

证毕.

2. Bertrand 曲线

定义 若一挠曲线C的主法线同时为另一曲线C^*的主法线，则C称为 Bertrand 曲线，C^*称为C的**配偶**.

根据这定义知道，C^*亦为 Bertrand 曲线；C则是C^*的配偶．所以C,C^*有 Bertrand **曲线偶**之称．1844 年，B. de Saint-Venant 提出应如何决定这族曲线的问题，至 1850 年由 J. Bertrand完全解决．

设$\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$为一条 Bertrand 曲线$C$上点的向量表示，而$\boldsymbol{r}^*=(x^*,y^*,z^*)$是$C^*$上对应点的向量表示．由于$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^*$是在同一主法线上的两点，则

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{N}. \tag{1}$$

关于C的弧长s微分上式两端，并根据 Frenet 公式进行改写，

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=\left(1-\frac{a}{r}\right)\boldsymbol{T}+\frac{da}{ds}\boldsymbol{N}+\frac{a}{\rho}\boldsymbol{B}. \tag{2}$$

然而$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}$在$C^*$的切线方向上，这个方向必须垂直于主法线，所以

$$\boldsymbol{N}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=0,$$

即$\frac{da}{ds}=0$，于是a为常数．就是说：一条 Bertrand 曲线的任何点与其配偶对应点间的距离始终是常值．

设C,C^*在对应点的两条切线的交角为ω，则可改写(2)：

$$\boldsymbol{T}^*=\cos\omega\cdot\boldsymbol{T}\pm\sin\omega\cdot\boldsymbol{B}, \tag{3}$$

式中的$\boldsymbol{T}^*$表示C^*在对应点的单位切向量．

关于s微分(3)的两端，

$$\frac{d\boldsymbol{T}^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}\equiv\frac{1}{r^*}\boldsymbol{N}^*\frac{ds^*}{ds}=\left(\frac{\cos\omega}{r}\mp\frac{\sin\omega}{\rho}\right)\boldsymbol{N}$$

$$+\frac{d\cos\omega}{ds}\boldsymbol{T}\pm\frac{d\sin\omega}{ds}\boldsymbol{B}.$$

但是 $\boldsymbol{N}^*$ 与 $\boldsymbol{N}$ 至多只能差一符号，故上式右端 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}$ 前的系数都等于零，于是 ω 为常数. 换言之，C 与 C^* 在对应点的两切线交于固定角.

现在比较(2)与(3)，并注意到 $\frac{da}{ds}=0$，则得

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{a}{r} & \frac{a}{\rho} \\ \cos\omega & \pm\sin\omega \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\pm\frac{a}{r}\sin\omega+\frac{a}{\rho}\cos\omega=\pm\sin\omega. \tag{4}$$

反过来，若一条挠曲线 C 的曲率及挠率之间存在关系式(4)，则 C 必为 Bertrand 曲线. 证明如下.

根据 C 及常数 a 作曲线 C^*:

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{N}$$

于是有

$$\boldsymbol{T}^*=\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*}=\left[\left(1-\frac{a}{r}\right)\boldsymbol{T}+\frac{a}{\rho}\boldsymbol{B}\right]\frac{ds}{ds^*}$$

以及

$$\frac{ds^*}{ds}=\sqrt{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{a}{\rho}\right)^2}.$$

考虑到(4)式，可得

$$\frac{1-\frac{a}{r}}{\cos\omega}=\frac{\frac{a}{\rho}}{\pm\sin\omega}=\frac{ds^*}{ds}. \tag{5}$$

由此可得

$$\boldsymbol{T}^*=\cos\omega\cdot\boldsymbol{T}\pm\sin\omega\cdot\boldsymbol{B}.$$

关于 s 微分,

$$\frac{1}{r^*}N^*\frac{ds^*}{ds}=\left(\frac{\cos\omega}{r}\mp\frac{\sin\omega}{\rho}\right)N,$$

因而

$$N^*=\varepsilon N \quad (\varepsilon=\pm 1). \tag{6}$$

这表示 C, C^* 在对应点有公共主法线,所以 C 为 Bertrand 曲线.

由此看出,Bertrand 曲线的特征方程是(4).

现在设想一条曲线,它的曲率及挠率之间存在一次方程

$$\frac{A}{r}+\frac{B}{\rho}+C=0, \tag{7}$$

式中的 A, B, C 均为常数. 若 $C=0$, 则(7)为一般螺线的特征方程,在前面已详细讨论过. 反过来,若 $C\neq 0$, 令 $\frac{A}{C}=-a$, $\frac{A}{B}=-\operatorname{tg}\omega$, 就可把(7)改写为(4),所以这时的(7)就是 Bertrand 曲线的特征方程.

由(1)确定的曲线 C^* 也是 Bertrand 曲线. 根据(1)与(6),可把 C 的对应点坐标表示为

$$r=r^*-\varepsilon aN^*. \tag{1*}$$

再根据 ε 等于 1 或 −1 改写(3)为:

$$T=\cos(-\varepsilon\omega)\cdot T^*\pm\sin(-\varepsilon\omega)\cdot B^*.$$

由此可见:当 C 与 C^* 交换位置时,从以往所获得的公式经过置换

$$\begin{pmatrix} s & a & \omega & r & \rho \\ s^* & -\varepsilon a & -\varepsilon\omega & r^* & \rho^* \end{pmatrix}$$

之后,即可求得它们相对应的关系.

例如,从(5)的第二个方程,即

$$\frac{a}{\rho}\frac{ds}{ds^*}=\pm\sin\omega,$$

可导出新关系

$$-\frac{\varepsilon a}{\rho^*}\frac{ds^*}{ds}=\pm\sin(-\varepsilon\omega),$$

即

$$\frac{a}{\rho^*}\frac{ds^*}{ds}=\pm\sin\omega.$$

于是消去$\frac{ds^*}{ds}$，有

$$\frac{1}{\rho\rho^*}=\frac{\sin^2\omega}{a^2}. \tag{8}$$

这样，我们得到 Schell **定理**：两配偶 Bertrand 曲线在对应点的挠率乘积等于正常数.

又从(5)的第一方程，即

$$\frac{ds}{ds^*}\left(1-\frac{a}{r}\right)=\cos\omega,$$

可推导新关系

$$\frac{ds^*}{ds}\left(1+\frac{\varepsilon a}{r^*}\right)=\cos\omega.$$

于是

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\left(1+\frac{\varepsilon a}{r^*}\right)=\cos^2\omega. \tag{9}$$

设C, C^*在对应点P，P^*的曲率中心为M, M^*，则P, P^*, M, M^*四点的交比等于

$$(PP^*, MM^*)=(0, a, r, a+\varepsilon r^*),$$

或按(9)改写为：

$$(PP^*, MM^*)=\frac{1}{\cos^2\omega}. \tag{10}$$

这样，我们得到 Mannheim **定理**：设两配偶 Bertrand 曲线C, C^*在对应点P, P^*的曲率中心为M, M^*，则交比(PP^*, MM^*)等于正常数.

3. Mannheim 曲线

定义 若一条空间曲线的主法线同时为另一曲线的从法线，则第一条曲线称为 Mannheim 曲线.

这种曲线是 Mannheim 在 1872 年发现的.

根据前段关于Bertrand曲线的方法可写出第二条曲线的解析表示为

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{N}, \tag{1}$$

式中 a 表示一常数.

用 s^*表示第二条曲线的弧长，且用$\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*$分别表示它的切线，主法线，从法线的单位向量. 关于 s 微分(1)，

$$\boldsymbol{T}^*\frac{ds^*}{ds}=\left(1-\frac{a}{r}\right)\boldsymbol{T}+\frac{a}{\rho}\boldsymbol{B}.$$

再关于 s 微分，则得

$$\frac{1}{r^*}\boldsymbol{N}^*\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2+\boldsymbol{T}^*\frac{d^2s^*}{ds^2}=\left(\frac{1}{r}-\frac{a}{r^2}-\frac{a}{\rho^2}\right)\boldsymbol{N}$$
$$+\frac{a}{r^2}\frac{dr}{ds}\boldsymbol{T}-\frac{a}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\boldsymbol{B}$$

但是根据假定，

$$\boldsymbol{N}=\varepsilon\boldsymbol{B}^*\quad(\varepsilon=\pm1),$$

所以

$$\frac{1}{r}-\frac{a}{r^2}-\frac{a}{\rho^2}=0, \tag{2}$$

反过来，若一曲线的曲率半径 r 与挠率半径 ρ 满足(2)，则它必有上述性质. 这个事实的证明从略.

这样，我们证明了，(2)为 Mannheim 曲线的特征方程.

§9. 极小曲线

1. 自然参数

若一条虚曲线 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的坐标满足微分方程

$$dx^2+dy^2+dz^2=0, \tag{1}$$

则称为**极小曲线**. 这时,弧长不存在,因而无法运用一般方法. 对它我们特别讨论于下.

首先要决定的是极小曲线的**自然参数** p 或 Vessiot-Study **参数**.

设 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是极小曲线的表示式,则按定义

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0,$$

于是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0.$$

现在把参数 t 改为 p,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dp}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{dp},\quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2t}{dp^2},$$

于是

$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}\right)^2=\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2\left(\frac{dt}{dp}\right)^4.$$

现在选取参数 p 使

$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}\right)^2=-1, \tag{2}$$

就可决定 $\left(\frac{dp}{dt}\right)^4$,即

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^4=-\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2. \tag{3}$$

从(3)取各侧的一个四次方根时,我们便有

$$p=\int\sqrt[4]{-\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}\,dt.$$

然而应该选取哪个根，在这里还是无法决定，而为此必须作进一步研究.

按照 Study 的做法，记

$$\frac{d^m\mathbf{r}}{dp^m}\cdot\frac{d^n\mathbf{r}}{dp^n}=(m,n)=(n,m), \tag{4}$$

则从行列式乘法定理易求得

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dp},\frac{d^2\mathbf{r}}{dp^2},\frac{d^3\mathbf{r}}{dp^3}\right)^2=\begin{vmatrix}\frac{dx}{dp} & \frac{dy}{dp} & \frac{dz}{dp}\\ \frac{d^2x}{dp^2} & \frac{d^2y}{dp^2} & \frac{d^2z}{dp^2}\\ \frac{d^3x}{dp^3} & \frac{d^3y}{dp^3} & \frac{d^3z}{dp^3}\end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix}(1,1) & (1,2) & (1,3)\\ (2,1) & (2,2) & (2,3)\\ (3,1) & (3,2) & (3,3)\end{vmatrix}. \tag{5}$$

但是根据(4),

$$\frac{d}{dp}(m,n)=(m+1,n)+(m,n+1),$$

且已知

$$(1,1)=0,\ (1,2)=0,\ (2,2)=-1,$$

所以$(1,3)=(3,1)=1$. 代进(5)式的结果是：

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dp},\frac{d^2\mathbf{r}}{dp^2},\frac{d^3\mathbf{r}}{dp^3}\right)^2=1.$$

从此可见，只要取 p 使它满足(2)式，那末总是成立下列关系：

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dp},\frac{d^2\mathbf{r}}{dp^2},\frac{d^3\mathbf{r}}{dp^3}\right)=\pm1.$$

现在让我们选定这样的 p，使得

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dp}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dp^3}\right)=1. \tag{6}$$

经过参数变换 $t\to p$ 后，从行列式的一个性质易知

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right)=\left(\frac{dp}{dt}\right)^6\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dp}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dp^3}\right)=\left(\frac{dp}{dt}\right)^6. \tag{7}$$

这样，$\left(\frac{dp}{dt}\right)^6$ 的值被完全决定了．与前面的条件(2)合用的结果是，参数 p 除一符号外被完全决定了：

$$(2,2)=-1, \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dp}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dp^3}\right)=1. \tag{8}$$

凡是满足(8)的参数 p 称为极小曲线的**自然参数**或 Vessiot-Study **参数**.

2. 基本定理

设两条极小曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$ 与 $\boldsymbol{r}^*(t)=(x^*(t), y^*(t), z^*(t))$ 在运动群下为重合，则

$$\begin{aligned} x^* &= a_1x+a_2y+a_3z+a, \\ y^* &= b_1x+b_2y+b_3z+b, \\ z^* &= c_1x+c_2y+c_3z+c, \end{aligned} \tag{1}$$

式中

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

表示直交阵，且其行列式等于 1．于是

$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{dp^2}\right)^2=\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{dt^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}^*}{dt^3}\right)=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right).$$

所以两曲线在对应点 t 有相同的自然参数 p 和不变量

$$(3,3)\equiv\left(\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dp^3}\right)^2=\varphi(p). \tag{3}$$

换句话说，当两极小曲线在运动群下能互相重合时，它们在对应点必须有相同的 p 和 $\varphi(p)$.

我们将证明这条件也是充分的:

设两极小曲线在对应点有相同的自然参数 p 和不变量 $\varphi(p)$，则它们必能在运动群下互相重合.

取公共自然参数 p 为两曲线的参数，而且设

$$\boldsymbol{r}(p)=(x(p),y(p),z(p)),\ \boldsymbol{r}^*(p)=(x^*(p),y^*(p),z^*(p)) \tag{4}$$

为它们的表示. 我们先决定三个函数 $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$，使 $\boldsymbol{r}(p)$ 的三个分量函数满足下列的微分方程

$$\frac{d^4\theta}{dp^4}+A(p)\frac{d^3\theta}{dp^3}+B(p)\frac{d^2\theta}{dp^2}+C(p)\frac{d\theta}{dp}=0, \tag{5}$$

即

$$\frac{d^4\boldsymbol{r}}{dp^4}+A(p)\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dp^3}+B(p)\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}+C(p)\frac{d\boldsymbol{r}}{dp}=\boldsymbol{0}. \tag{6}$$

为了决定三个系数 A, B, C，我们首先用 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dp}$ 与(6)的两端作点乘. 从

$$(1,1)=(1,2)=0,$$

立即得到

$$(1,4)+A(1,3)=0.$$

然而

$$(1,4)=-(2,3)=0,$$

所以

$$A(p)=0.$$

其次，以 $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}$ 与(6)的两端作点乘，结果是:

$$(2,4)+B(2,2)=0.$$

然而$(2,2)=-1$, $(2,4)+(3,3)=0$,所以

$$B(p)=(2,4)=-(3,3)=-\varphi(p).$$

最后, 用$\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dp^3}$与(6)两端作点乘,则

$$(3,4)+C(1,3)=0.$$

然而,$(1,3)+(2,2)=0$, $(3,4)+(4,3)=\varphi'(p)$,所以

$$C(p)=-(3,4)=-\frac{1}{2}\varphi'(p).$$

这样,我们终于获得了微分方程

$$\frac{d^4\theta}{dp^4}-\varphi(p)\frac{d^2\theta}{dp^2}-\frac{1}{2}\varphi'(p)\frac{d\theta}{dp}=0. \tag{7}$$

我们也可用同样方法去决定 $\boldsymbol{r}^*$ 的三个分量所满足的微分方程(5). 由于 p 及 $\varphi(p)$ 为两曲线所共有, 所以欲求的微分方程仍旧是(7). 于是 $x(p),y(p),z(p)$ 及 $x^*(p),y^*(p),z^*(p)$ 都是(7)的解. 另外,$\theta=1$ 不但满足(7),而且还和 $x(p),y(p),z(p)$, 构成了(7)的四个线性独立的解,因此 $x^*(p),y^*(p)$, $z^*(p)$ 都可表达为形式(1),而其系数都是常数.

然而 p 乃是双方曲线的自然参数.

$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{dp^2}\right)^2=\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2}\right)^2=-1,$$

从(1)立即导出下列关系:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1,$$

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3$$
$$=a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0,$$

就是说,方阵(2)是直交阵. 再从

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}^*}{dp},\frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{dp^2},\frac{d^3\boldsymbol{r}^*}{dp^3}\right)=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dp},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dp^2},\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dp^3}\right)=1,$$

容易断定,这方阵的行列式等于1.

由此看出,曲线$r^*(p)$实际上是曲线$r(p)$运动后的曲线,因此,两曲线是能互相重合的.

3. 极小曲线的方程

现在来讨论微分方程

$$dx^2+dy^2+dz^2=0 \tag{1}$$

的积分问题. 设$f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha)$为一组解,则

$$f_1'^2(\alpha)+f_2'^2(\alpha)+f_3'^2(\alpha)=0.$$

我们不妨假定$f_3'(\alpha)\neq 0$,把上列方程改写为

$$\frac{f_1'(\alpha)+if_2'(\alpha)}{-f_3'(\alpha)}\cdot\frac{f_1'(\alpha)-if_2'(\alpha)}{f_3'(\alpha)}=1.$$

若记

$$\frac{f_1'(\alpha)+if_2'(\alpha)}{-f_3'(\alpha)}=u,$$

则$u=u(\alpha)$,而且

$$\frac{f_1'(\alpha)-if_2'(\alpha)}{f_3'(\alpha)}=\frac{1}{u}.$$

把后两式改写为

$$f_1'(\alpha)+if_2'(\alpha)+uf_3'(\alpha)=0,$$

$$f_1'(\alpha)-if_2'(\alpha)-\frac{1}{u}f_3'(\alpha)=0.$$

由此解得

$$\frac{f_1'(\alpha)}{1-u^2}=\frac{f_2'(\alpha)}{i(1+u^2)}=\frac{f_3'(\alpha)}{2u}.$$

记它们的公比为$\frac{1}{2}F(u)\frac{du}{d\alpha}$,积分后得到

$$
\begin{aligned}
x&=f_1(\alpha)=\frac{1}{2}\int(1-u^2)F(u)\,du,\\
y&=f_2(\alpha)=\frac{i}{2}\int(1+u^2)F(u)\,du,\\
z&=f_3(\alpha)=\int uF(u)\,du,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式中的 $F(u)$ 表示 u 的任意函数.

为避免出现积分符号起见,特记

$$F(u)=f'''(u),$$

式中,$f(u)$ 也是任意函数. 我们根据分部积分法容易把(2)表示为

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{1}{2}(1-u^2)f''(u)+uf'(u)-f(u),\\
y&=\frac{i}{2}(1+u^2)f''(u)-iuf'(u)+if(u),\\
z&=uf''(u)-f'(u).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

这就是 Weierstrass(1888)所发现的公式.

习 题

1. 证明极小曲线(3)的自然参数为

$$p=\int\sqrt{if'''(u)}\,du. \tag{4}$$

2. 设方程(2)表示一条极小曲线,证明其不变量等于

$$\varphi(p)=\frac{i}{4F^3}(5F'^2-4FF''). \tag{5}$$

Cartan(1935) 称 $\kappa=-\frac{i}{2}\varphi(p)=\frac{5F'^2-4FF''}{8F^3}$ 为极小曲线(2)的**曲率**.

3. 将一极小曲线垂直射影到两两正交的三个平面上,并对三条正射影曲线在对应点的曲率半径 r_1, r_2, r_3 选取适当的符号. 证明

$$r_1+r_2+r_3=0 \qquad \text{(Blaschke, 1909)}. \tag{6}$$

§10. 曲线的整体性质

微分几何学中所讨论的内容，原来是关于一个图形的局部性质．然而这种局部性质与图形的整体性质之间存在着一定的关系．所谓整体微分几何学就是研究这种关系的分科．例如，前面叙述的等周问题实际上就属于这类．为阐明它的意义，我们就平面曲线和挠曲线各取一例进行讨论于下．

1. 四顶点定理

定理 设一条凸闭曲线的曲率半径$r(s)$存在且为s的连续函数，则它的顶点，即$r(s)$取极大或极小值的点，至少有四个．

Blaschke 的证明 设s为曲线弧长，$r(s)$为曲率半径，而且φ为正向切线与正x轴的交角，则

$$r=\frac{ds}{d\varphi},\quad \frac{dx}{ds}=\cos\varphi,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\varphi,$$

于是

$$x-x_0=\int_{s_0}^{s}\cos\varphi ds=\int_{\varphi_0}^{\varphi}r(\varphi)\cos\varphi d\varphi,$$

$$y-y_0=\int_{s_0}^{s}\sin\varphi ds=\int_{\varphi_0}^{\varphi}r(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

然而，曲线是凸闭的，所以$r>0$，而且

$$\int_{-\pi}^{\pi}r\cos\varphi d\varphi=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}r\sin\varphi d\varphi=0. \tag{1}$$

在曲线的任何点$P(\varphi)$引正向切线t_φ，又从原点O引与t_φ平行的半直线使与单位圆相交于点P'．P'的坐标应当为

$$x'=\cos\varphi,\qquad y'=\sin\varphi.$$

当P绕曲线一周时，P'也绕单位圆一周．

现在把曲线在$P(\varphi)$的曲率半径$r(\varphi)$看做质量，并设想它被安放到单位圆上的对应点P'，于是单位圆上的各点都有相应的质

量. 这样一来，方程(1)表示：此质量系统的重心为圆心 O.

根据假设，$r(\varphi)$ 是 φ 的连续函数，所以在曲线上必取极大值与极小值，且极大与极小必定互相交叉发生. 因此，顶点的个数必为偶数. 所以我们只须证明下列事实：

仅有两个顶点的卵形线不存在.

为此，我们采用反证法. 假定有一卵形线，它的曲率半径仅有一个极大值与一个极小值. 现在分别用 A 及 B 表示曲线上的这两点，并设 A' 及 B' 是单位圆周上的对应点. 在单位圆周上无论是顺时针移动或是逆时针移动，从 A' 到 B' 的各点所放置的质量一路减少. 若取 A' 至 B' 的方向为 y 轴正向，则 x 轴以下半圆周上任何一点所置的质量就比它关于 x 轴的对称点上所置的质量来得大，因此，全体的重心必在 x 轴的下方，而决不能与圆心重合. 这就与上述结果互相矛盾. 所以假定的卵形线不存在. 换句话说，顶点个数至少有四个. 证毕.

椭圆仅有四个顶点，即曲线与长短两轴的交点. 因此，卵形线顶点的最小个数等于 4.

这个证明的优点在于所用的假设条件较弱. 倘若假定 $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)$ 的存在及连续性，则有更巧妙的证明，即

Herglotz 的证明 设 AB 直线的方程是

$$ax+by+c=0 \quad (a, b, c \text{ 皆为常数}).$$

用 $\kappa=\frac{1}{r}$ 表示曲率，并作积分

$$\oint (ax+by+c)\kappa'\, ds.$$

因为对于直线 AB 两侧的点，代数式 $ax+by+c$ 的值有不同符号，且根据假设 κ' 也有这性质，所以 $(ax+by+c)\kappa'$ 在全曲线上除了在 A、B 两点取 0 值外，全取正值或负值，于是

$$\oint (ax+by+c)\kappa' \, ds \neq 0.$$

然而根据平面曲线的 Frenet 公式(§7.1)

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\kappa\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{d^2 y}{ds^2} = +\kappa\frac{dx}{ds},$$

我们有

$$\oint \kappa' x ds = [\kappa x]\Big|_0^L - \oint \kappa\frac{dx}{ds}ds = -\oint \frac{d^2 y}{ds^2}ds = 0,$$

$$\oint \kappa' y ds = [\kappa y]\Big|_0^L - \oint \kappa\frac{dy}{ds}ds = \oint \frac{d^2 x}{ds^2}ds = 0,$$

$$\oint \kappa' \, ds = \kappa\Big|_0^L = 0.$$

因此，对于任何常数 a,b,c 总是成立关系式:

$$\oint (ax+by+c)\kappa' \, ds = 0.$$

这结果表明了所假定的仅有两个顶点的卵形线不存在． 证毕．

四顶点定理最初是印度加尔各答大学教授S.Mukhopadhyaya (1909)所证明，但长期未被大家所知悉．1912年A. Kneser在他纪念 H. Weber 的论文中独立发现了此定理，第二年(1913)又有Blaschke 的证明．迄今为止讨论的学者颇多，例如，H. Mohrmann (1914)，W. Süss(1935)，W. Graustein(1936)，虞介藩(1937)等．

2. Fenchel 定理

对于空间曲线的研究困难较多，结果也比平面曲线的少．下面举一个 W. Fenchel(1928)证明的定理．

定理 设一条空间封闭曲线的曲率为 $\kappa=\frac{1}{r}$，则其全曲率

$$\int_0^L \kappa ds \geq 2\pi, \tag{1}$$

并且等号对且仅对平面凸闭曲线成立.

这定理的证明需要一个引理(Löwner 定理，参照 §1.4 习题 5)：任何封闭挠曲线的切线象与任何大圆弧必相交.

原曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的切线象决定于表示式

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{T}(s) \quad (0\leqq s\leqq L),$$

式中 $\boldsymbol{T}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$. 从此导出象的全长

$$\int_0^L\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}\right|ds=\int_0^L\left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right|ds=\int_0^L\kappa ds,$$

即原曲线的**全曲率**. 于是我们可改写上述定理为下列方式:

定理　任何一条封闭曲线的切线象全长不小于 2π.

Fenchel 原来的证明非常巧妙但是很长，这里不详细叙述. 我们将根据 Liebmann(1929)的方法进行证明如下.

设所讨论的切线象 S 上的两点 A，B 把整个 S 的弧长平分为两段 $\widehat{AB}=\widehat{BA}$. 现在用大圆弧 AB 连接 A, B; 设它的劣弧为 AB: $AB\leqq\pi$, $BA\geqq\pi$.

若 $AB=\pi$, 则 $\widehat{AB}\geqq AB=\pi$, $\widehat{BA}=\widehat{AB}\geqq\pi$, 于是 S 的全长 $l=\widehat{AB}+\widehat{BA}\geqq 2\pi$. 所以我们只要研究 $AB<\pi$ 的情形就足够了.

连接球心 O 及 AB 的中点 M，且作一大圆使它所在平面垂直

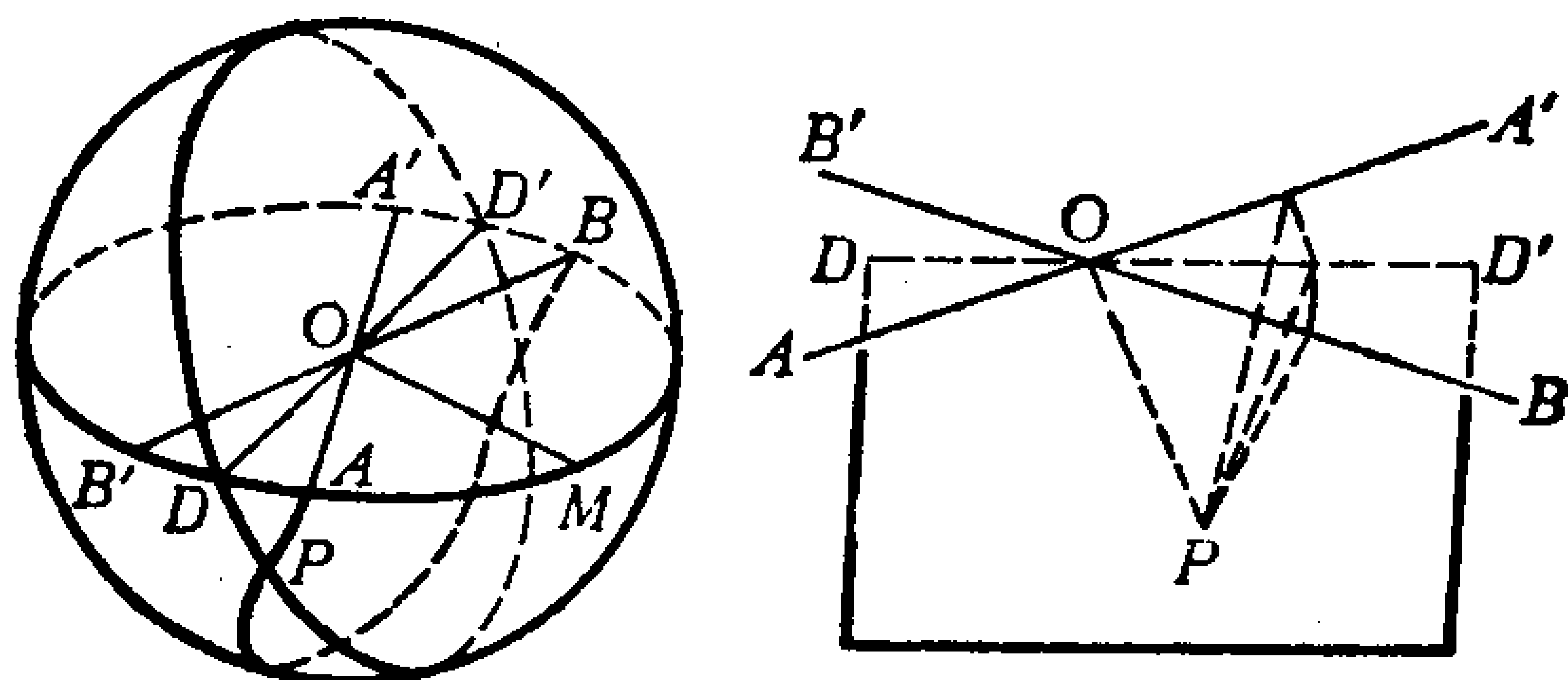


图 12

于 OM. 从引理知这个大圆与 S 必有一个交点 P（图 12）. 另外分别用大圆弧 AP, PB 连接 A 与 P，P 与 B，则

$$\frac{l}{2}=\overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{PB}\geqq AP+PB.$$

然而 $AP+PB=\pi$. 为什么呢？设 DD' 是大圆 AMB 的直径，$DD'\perp OM$，则 DD' 是 $\angle AOB$ 的外角平分线且大圆弧 DPD' 所在平面经过 DD' 并垂直于平面 AOB，所以

$$\angle POB=\angle POA'.$$

于是

$$\angle AOP+\angle POB=\angle AOP+\angle POA'=\pi.$$

然而球的半径等于 1，所以

$$AP+PB=\pi.$$

因此

$$\frac{l}{2}\geqq\pi \quad 即 \quad l\geqq 2\pi.$$

倘若 $l=2\pi$，则 S 为大圆，于是原曲线为平面曲线，而且

$$\int_0^L \kappa ds=\oint d\varphi=2\pi$$

表明：原曲线是卵形线.（严密证明可参照：苏步青著《微分几何五讲》，上海科学技术出版社，1979 年版，4—11 页.）

习　　题

1. 证明任何一条卵形线至少有一个外切正方形. [令 $D(\varphi)=p(\varphi)+p(\varphi+\pi)$，证明 $D(\varphi)-D\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=0$ 在区间 $0\leqq\varphi<\pi$ 内至少有一个根.]

2. 证明卵形线的最小密切圆全部在卵形线内部，而且最大密切圆必包含卵形线.

3. 如果卵形线的两条任意平行切线间的距离始终等于定长 b，则此卵形线称为定幅曲线，b 称为幅. 试证定幅曲线的周长等于幅的 π 倍 (Barbier,

1860).

4. 当定幅曲线的两点有平行切线时,称为**对点**. 求证下列两定理:

(*A*) 对点的连线是曲线的二重法线.

(*B*) 对点的曲率半径之和为常数.

5. 设想在卵形线的各点都放上一个等于该点的曲率的质量. 此质量系统的重心称为 Steiner **曲率重心**. 试证:

(*A*) 卵形线 $x=x(\varphi), y=y(\varphi)$ 的曲率重心坐标为

$$x_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\varphi)\,d\varphi, \quad y_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(\varphi)\,d\varphi.$$

(*B*) 卵形线的平行曲线有公共的曲率重心(林鹤一,T. Hayashi).

(*C*) 从卵形线内部一点 O 引各切线的垂线,其垂点轨迹称为卵形线关于点 O 的**垂足曲线**. 证明垂足曲线的面积 $A(O)$ 当 O 与曲率重心重合时为最小. 凡是使 $A(O)$ 为定数的点 O 的轨迹是以曲率重心为中心的一个圆周(Steiner, 1838).

(*D*) 若设 $p(\varphi)$ 的 Fourier 级数为

$$p(\varphi)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi),$$

则只有当原点 O 与曲率中心重合时才得到 $a_1=0, b_1=0$.

(窪田忠彦,T. Kubota, 1918).

(*E*) 设一卵形线始终与两定直线相切且在其间转动,当卵形线以某一位置出发转动而再回到原来位置时,卵形线所在平面上的一个定点 O 必画出一条封闭曲线. 用 $A(O)$ 表示它的面积,则 $A(O)$ 在 O 与曲率重心重合时取最小值. 一般地,凡使 $A(O)$ 等于定值的点 O 的轨迹是以曲率重心为中心的一个圆周(苏步青,B. Su, 1927).

6. 在卵形线上各点放置一个等于此点的曲率的质量. 设 $I(l)$ 是此质量系统关于一条定直线 l 的惯性矩. 试求使 $I(l)$ 取最小值的直线 l. 所求的直线(称为曲率轴)必经过曲率重心(苏步青, 1928).

7. 如果一卵形线满足

$$\int_0^{2\pi}r(\varphi)\sin 2\varphi\,d\varphi=0, \quad \int_0^{2\pi}r(\varphi)\cos 2\varphi\,d\varphi=0,$$

那末,这卵形线与它的平行曲线必有公共的曲率轴(苏步青, 1928).

8. 定幅曲线属于上列卵形线族.

9. 试证关于上列卵形线族的两个定理:

(A) 顶点至少有六个.

(B) 外切正方形至少有三个 (Ganapathi, 1934).

§11. 可展曲面

1. 直纹面

由直线的运动所画成的曲面称为**直纹面**. 设 t 为定值而 τ 为参数,则方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(t)+\tau\boldsymbol{l}(t) \tag{1}$$

应当表示一条直线. 当 t 变动时,上列方程表示单参数直线族. 所以将 (1) 中的 t 及 τ 看成两个独立参数时, 就得到直纹面的解析表示.

现在要求使一个直纹面上所有直线为一条挠曲线的切线, 或者都通过一个定点,或者互相平行的条件.

设直纹面的直线都切于一条曲线 C, 则必有适当的函数 $\tau=\tau(t)$,使 C 的方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(t)+\tau(t)\boldsymbol{l}(t). \tag{2}$$

关于 t 微分,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{a}(t)}{dt}+\frac{d\tau(t)}{dt}\boldsymbol{l}(t)+\tau(t)\frac{d\boldsymbol{l}(t)}{dt}. \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{l}(t)$在 C 的切线方向上,所以必存在适当的函数 $k(t)$使

$$\boldsymbol{a}'+\tau'\boldsymbol{l}+\tau\boldsymbol{l}'=k\boldsymbol{l}.$$

由此消去 τ 及 $\tau'-k$ 这两个函数,我们就得到必要条件

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}')=0. \tag{4}$$

由挠曲线的切线所构成的曲面称为**切线面**. 此时的切线就是它的**母线**. 特别是,当母线均交于同一点时,直纹面称为**锥面**, 这点称为**顶点**. 所有母线互相平行的直纹面称为**柱面**. 以上三种直纹

面合称**可展曲面**，这是因为它们不用伸缩便可展成平面的缘故(详见第二章曲面论).

我们容易证明：(4)也是直纹面成为可展曲面的充分条件.

当可展曲面为切线面时，原曲线 C 称为**刃线**，它上面的点是曲面的奇点.

例 1 单参数平面族的包络面必为可展曲面.

设单参数平面族的方程是

$$\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{r}-p(t)=0,$$

式中 $\boldsymbol{n}(t)$的三个分量与$p(t)$都是 t 的 C^4 级函数. 我们作对应于 t 的两个值 $t, t+\Delta t$ 的平面

$$\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{r}-p(t)=0,$$

$$\boldsymbol{n}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{r}-p(t+\Delta t)=0.$$

它们的交线决定于两方程

$$\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{r}-p(t)=0,$$

$$\frac{\boldsymbol{n}(t+\Delta t)-\boldsymbol{n}(t)}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{r}-\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t}=0.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，两平面的交线取极限位置

$$\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{r}-p(t)=0,\quad \boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}-p'(t)=0.$$

然后变动 t，这些直线就构成了一个直纹面. 另一方面，从三个方程

$$\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{r}-p(t)=0,$$

$$\boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}-p'(t)=0,$$

$$\boldsymbol{n}''(t)\cdot\boldsymbol{r}-p''(t)=0$$

可解出 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，所对应的曲线的切线全体便画成上述的直纹面. 实际上，微分以下两方程

$$\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)-p(t)=0,\ \boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)-p'(t)=0,$$

并注意到 $\boldsymbol{n}''(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)-p''(t)=0$，我们得出

$$\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0, \quad \boldsymbol{n}'(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0.$$

这就表明，曲线的切线与直纹面的母线具有同一方向. 所以直纹面是曲线的切线面. 原平面必为曲线的密切平面.

例 2　试求一条挠曲线的法平面族的包络.

挠曲线 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),\ z(s))$ 在弧长 s 的点处有一张法平面，它的方程应为

$$\boldsymbol{T}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0,$$

所以它的包络就是由直线

$$\boldsymbol{T}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=0, \boldsymbol{N}(s)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s))=r(s)$$

所生成的直纹面. 这直线便是曲线在 s 处的曲率轴(参考 § 5). 尤其值得注意的是，这时可展曲面的刃线就是密切球中心的轨迹(§ 5, 公式(8)).

例 3　试求一条挠曲线的从切平面族的包络.

此包络应当为可展曲面，且曲面在这条挠曲线各点的法线与同一点的主法线相重合. 所以给出的曲线是此包络面的测地线(参考 § 4.2, 例 1). 若将此包络展平，则原曲线必化为一条直线. 这即为从切平面的另一种称呼化直平面的由来.

2. Cesàro 曲线

设一直线固定在挠曲线 C 的活动标架内. 当此直线随标架活动而画成一个可展曲面时，问 C 应该为何种曲线.

这种曲线称为 Cesàro 曲线. 下面来求它的特征方程.

根据假设，可展曲面的母线是活动标架内的固定直线，所以它的方程如下，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+(p_1+tq_1)\boldsymbol{T}(s)+(p_2+tq_2)\boldsymbol{N}(s)\\ +(p_3+tq_3)\boldsymbol{B}(s),\end{aligned} \tag{1}$$

式中 $p_i, q_i (i=1,, 2, 3)$ 皆为常数.

将 s 及 t 看作独立参数时，(1)表示所讨论的直线构成的直纹面的方程，前段的充要条件这时变为：

$$\left(\boldsymbol{T}+\frac{p_1}{r}\boldsymbol{N}+p_2\left(-\frac{1}{r}\boldsymbol{T}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{B}\right)-\frac{p_3}{\rho}\boldsymbol{N},\right.$$

$$q_1\boldsymbol{T}+q_2\boldsymbol{N}+q_3\boldsymbol{B},$$

$$\left.\frac{q_1}{r}\boldsymbol{N}+q_2\left(-\frac{1}{r}\boldsymbol{T}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{B}\right)-\frac{q_3}{\rho}\boldsymbol{N}\right)=0.$$

用值等于 1 的行列式

$$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$$

乘上式两端，则可改写为

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{p_2}{r} & \frac{p_1}{r}-\frac{p_3}{\rho} & \frac{p_2}{\rho} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -\frac{q_2}{r} & \frac{q_1}{r}-\frac{q_3}{\rho} & \frac{q_2}{\rho} \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

展开后易得$\frac{1}{r}$，$\frac{1}{\rho}$所满足的二次方程

$$A\frac{1}{r^2}+B\frac{1}{r\rho}+C\frac{1}{\rho^2}+D\frac{1}{r}+E\frac{1}{\rho}=0, \tag{3}$$

式中 A,B,C,D,E 表示常数.

特别当 $p_1=p_2=p_3=0$ 时，(2)化成$\frac{1}{\rho}:\frac{1}{r}=$ 常数，所以曲线为一般螺线.

3. 渐缩线及渐伸线

挠曲线在各点的法线构成一个单参数族. 设 τ 为一条法线与主法线的交角，则此法线的方程应为

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+t(\cos\tau\cdot\boldsymbol{N}+\sin\tau\cdot\boldsymbol{B}), \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$的分量及 τ 皆为弧长 s 的函数，而 t 则为法线上点

的参数

当点沿曲线变动时，对于$\tau=\tau(s)$的法线(1)画成一个直纹面. 现在来研究这轨迹成为一个可展曲面的充要条件.

我们仍旧应用本节第1段所得的方程到(1)式，易得

$$\left(\boldsymbol{T}, \cos\tau\cdot\boldsymbol{N}+\sin\tau\cdot\boldsymbol{B}, \cos\tau\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{T}}{r}+\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right)-\sin\tau\cdot\frac{\boldsymbol{N}}{\rho}\right.$$
$$\left.+(-\sin\tau\cdot\boldsymbol{N}+\cos\tau\cdot\boldsymbol{B})\frac{d\tau}{ds}\right)=0.$$

整理后，

$$\left(\boldsymbol{T}, \cos\tau\cdot\boldsymbol{N}+\sin\tau\cdot\boldsymbol{B}, \left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\tau}{ds}\right)(-\sin\tau\cdot\boldsymbol{N}+\cos\tau\cdot\boldsymbol{B})\right)$$
$$=0,$$

也就是

$$\frac{1}{\rho}+\frac{d\tau}{ds}=0. \tag{2}$$

所以所求的函数$\tau(s)$应为

$$\tau(s)=-\int\frac{ds}{\rho(s)}. \tag{3}$$

从而所求的可展曲面是

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s)+t\left(\cos\int\frac{ds}{\rho(s)}\cdot\boldsymbol{N}(s)-\sin\int\frac{ds}{\rho(s)}\cdot\boldsymbol{B}(s)\right). \tag{4}$$

要注意的是计算不定积分$\int\frac{ds}{\rho(s)}$时，积分常数为任意，故得下列定理：

设从一条挠曲线上各点适当地引一条法线，使沿挠曲线的全体法线构成可展曲面，则按同一方向旋转定角后的法线仍旧构成可展曲面.

于是从一条挠曲线C出发，我们可作单参数的可展曲面族. 每个可展曲面的刃线称为C的**渐缩线**，而C则称为每条刃线的**渐伸线**.

由此可见，一条挠曲线有单参数的渐缩线族，而且每条渐缩线的渐伸线为C及其他单参数母线族的直交曲线.

习　　题

1. 我们用挠曲线在一点P处的密切平面去截这挠曲线的切线面. 证明：所得的平面曲线在P处的曲率半径等于曲线在P处的曲率半径的$\frac{4}{3}$.

(Beltrami, 1865).

2. 经过挠曲线在一点P处的切线，作密切平面以外的平面，证明此平面与切线面的交线必以P为拐点.

3. 试求一条挠曲线的所有密切平面的直交曲线.

4. 试求一条挠曲线的所有法平面的直交曲线.

§12. Darboux 方法

Darboux 研究曲线论时不采用普通的方法，而独树一帜地利用了运动学的简单原理. 为明了其中的妙处，把他采用的方法简述于下，以便参考 Darboux 的名著«Leçons».

我们把曲线$\boldsymbol{r}(s)$看作质点运动的轨迹，把弧长s看作时间，则当s变化时，曲线在s点的活动标架一方面沿曲线作移动，另一方面又绕s点作转动. 转动的瞬时角速度向量记为$\boldsymbol{\omega}(s)$.

根据运动学中速度迭加的简单原理，标架向量$\boldsymbol{T}(s)$的端点的瞬时速度是

$$\frac{d(\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{T}(s))}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}+\boldsymbol{\omega}(s)\times\boldsymbol{T}(s),$$

整理后，便有

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{T}.$$

同理得到

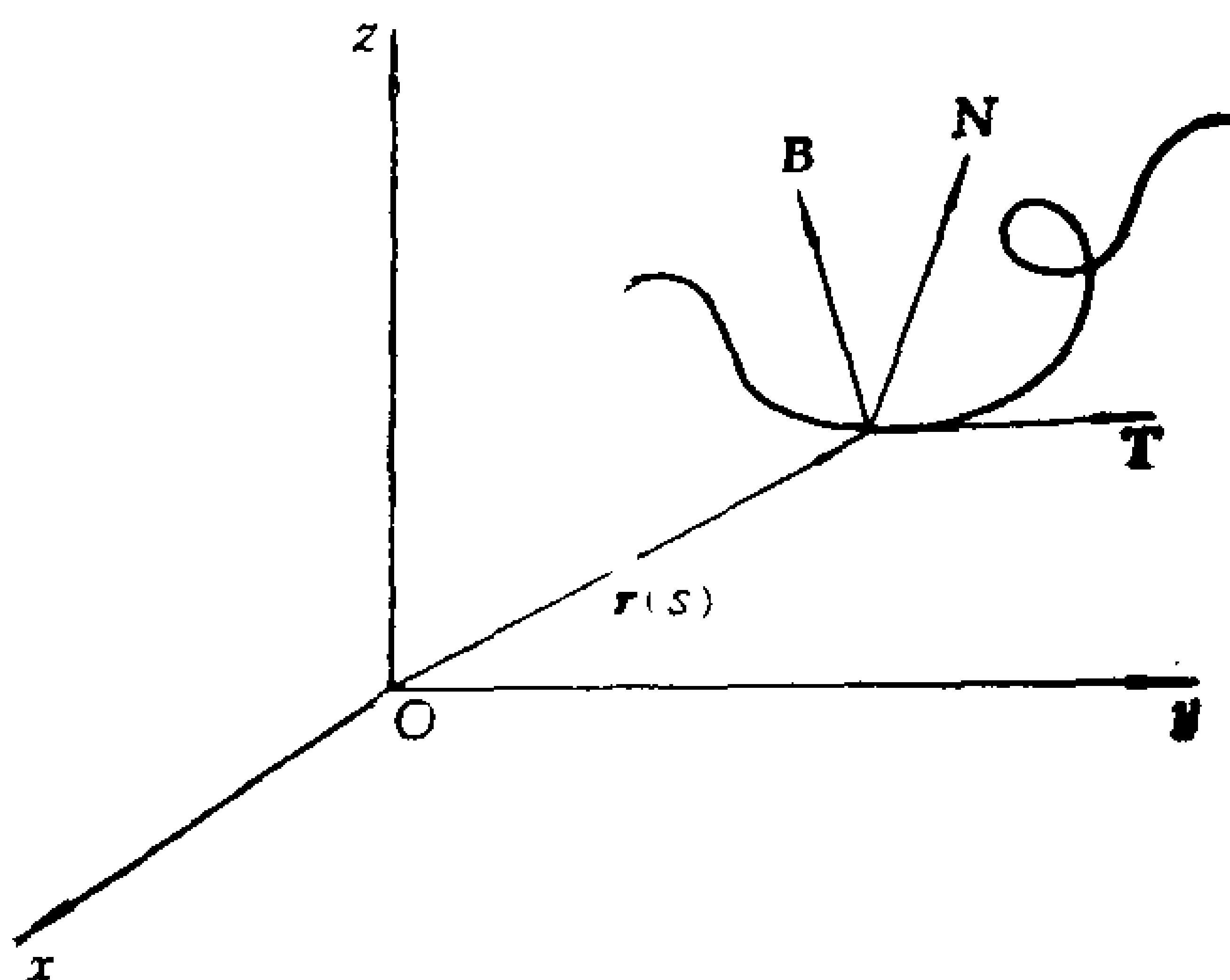


图 13

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{N}, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B}.$$

若记 $\boldsymbol{\omega}=a\boldsymbol{T}+b\boldsymbol{N}+c\boldsymbol{B}$, 注意到$\boldsymbol{N}$的定义是

$$\boldsymbol{N}=\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right|,$$

就有

$$0=\boldsymbol{B}\cdot\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{N},$$

即 $b(s)\equiv 0$. 于是(1)式就可改写为

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}&=\qquad c\boldsymbol{N},\\ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds}&=-c\boldsymbol{T}\qquad +a\boldsymbol{B},\\ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds}&=\qquad -a\boldsymbol{N}.\end{aligned} \tag{2}$$

由于 $c=\left|\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\right|$是相邻切线的交角对 s 的变化率, $|a|=\left|\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\right|$是相邻从法线的交角对 s 的变化率, 类似于前面讨论表明(参阅 § 1.3,

§2)：c 和 a 分别是曲线在 s 处的曲率和挠率，公式(2)也就是 Frenet 公式．角速度向量

$$\omega(s)=a\boldsymbol{T}+c\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}+\frac{1}{\tau}\boldsymbol{B}$$

称为 Darboux 向量．

总　习　题

(较难者附有星号)

1. 试证：$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3},\ \frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4}\right)=\frac{1}{r^5}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

2. 证明：$\frac{1}{r^2}=\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-4}\left\{\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\right\}$.

3. 设一条空间曲线在各点处的活动标架与给定平面交于一个正三角形的三顶点．问这种曲线是否存在？　　(Goursat)

4. 在挠曲线的主法线上，从曲线点 P 截取定长，设其端点为 Q．证明 Q 的轨迹与主法线直交．

5. 在正圆锥上决定一条曲线，使它与母线相交于定角　　(Pappus)．

6. 在球面上取一个固定小圆和一个与之相切的动大圆．证明大圆上任何一定点所画的轨迹为一般螺线．

7*. 设 C 为连续弯曲的一条闭的挠曲线．在各点处的 ds 上作用力为 $\frac{ds}{r}$，但所沿的方向为此点的主法线的正向．试证曲线保持均衡状态(录自 Polyà-Szegö 著《Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis》第二卷)．

8. 设一条定曲率曲线与一条定挠率曲线以点互相对应，且在对应点的两条切线平行．将对应点间的线段分为定比，则其分点的轨迹乃是一条 Bertrand 曲线．　　(Briochi)

9*. 在一条定挠率 $\frac{1}{a}$ 的曲线的各点 P 处作密切平面 π，且在 π 上以 P 为中心作一半径等于 a 的圆．证明这单参数圆族的任何一条直交曲线也是定挠率 $\frac{1}{a}$ 的曲线．　　(Demartres)

10. 设一条平面曲线上的点 O 为拐点，且 t_0 为 O 的切线．作一条三次曲线 C_3，使它在 O 与原曲线构成四阶接触且以 t_0 以外任何一点 M 为尖点．证明：

(A) 无论点M如何选择，C_3在M的尖点切线t与t_0始终相交于一个定点O_4.

(B) 凡使C_3与C在O构成五阶接触时，点M的轨迹是经过O的一条直线l_5.

(C) 当M在l_5的某一定点O_6时，所对应的C_3与C在O构成六阶接触.

(Bompiani, 1926)

11*. 设O为挠曲线Γ的正常点，且t_0为Γ在O处的切线. 经过t_0任意作一平面π，使它与Γ的切线面相交于一条平面曲线C. 证明:

(A) 当π不为Γ在O的密切平面时，O是C的拐点.

(B) 当π在t_0的周围旋转时，C在t_0上的点O_4与π间的对应是射影对应.

(C) 当π在t_0的周围旋转时，C的对应点O_6的轨迹是一条三次挠曲线.

(苏步青，1935)

12. 在空间曲线上取两点P及Q. 设线段PQ的长为s，且P、Q间曲线的弧长为b. 证明

$$\lim_{Q\to P}24\frac{b-s}{b^3}=\frac{1}{r^2},$$

式中$\frac{1}{r}$表示曲线在P的曲率.　　(Finsler, 1918)

13*. 在挠曲线上顺取距离为ds的四个邻近点1,2,3,4. 证明

$$\overline{12}\cdot\overline{34}+\overline{23}\cdot\overline{14}-\overline{13}\cdot\overline{24}=\frac{1}{6}\frac{R^2}{r^4\rho^2}ds^6,$$

式中r,ρ,R分别表示曲线在点1的曲率半径，挠率半径及密切球半径.

14*. 设一条封闭挠曲线有连续切线. 如将其各点的主法向量平行移动到原点，则各端点的轨迹在单位球面上必平分球面积.

(Jacobi, 1842; Fenchel, 1934)

15*. 设(x,y)为卵形线C外部的一点；t_1,t_2是由(x,y)所引C的两切线长；r_1,r_2是在两切点处的曲率半径，且α为两切线的交角. 证明

$$2\pi^2=\iint\frac{\sin\alpha}{t_1t_2}dxdy,$$

$$L^2=2\iint\sin\alpha\cdot\frac{r_1r_2}{t_1t_2}dxdy,$$

式中积分系关于C的外部计算，而L则为C的周长.　　(Crofton, 1868)

第二章　曲　面　论

§13. 基本形式

1. 第一基本形式 曲面的线素

假设空间一点的直交坐标 x,y,z 都是两个独立变数 u,v 的函数①，它的轨迹就称为**曲面**. 以后我们用参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \tag{1}$$

或向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v) \tag{1'}$$

来表示曲面. 为简便起见，对于 u,v 的数值函数 $f(u,v)$ 或向量值的函数 $\boldsymbol{a}(u,v)$，我们采用记号

$$f_u=\frac{\partial f}{\partial u},\quad f_v=\frac{\partial f}{\partial v},\quad f_{uu}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},\cdots,$$

$$\boldsymbol{a}_u=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial u},\quad \boldsymbol{a}_v=\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial v},\quad \boldsymbol{a}_{uu}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial u^2},\cdots$$

来表示它们的各阶偏导数.

如果从(1)消去 u 和 v，我们应当得到一个方程

$$F(x,y,z)=0. \tag{2}$$

反过来，设点 (x,y,z) 满足(2)，而且 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$，则如记 $x=u,\ y=v$，我们就可由(2)解出 z，从而得到

$$x=u,y=v,z=f(u,v). \tag{1''}$$

① 今后如无特别说明，所遇到的函数总假设是相当光滑的，我们不再指出它们的可微阶数.

Gauss 是用参数方程(1)表示曲面的. 有时为了讨论特殊问题的需要,曲面也可用(1″)的形式,即 $z=f(x,y)$ 来表示. Monge 是经常使用后面这种表示的.

当参数 (u,v) 变成 $(u+du,v+dv)$ 时,曲面上的点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 在 du,dv 的一阶无穷小范围内,变到 $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}=(x+dx,y+dy,z+dz)$,这里

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv.$$

于是这两点间的距离平方是

$$ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r},$$

或

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2, \tag{3}$$

式中我们已记

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v. \tag{4}$$

等式(3)的左侧 ds^2 称为**曲面的线素**,右侧是 du,dv 的二次形式,称为**第一基本形式**. 三个系数 E,F,G 则称为**第一基本量**.

在两个参数 u,v 中如果有一个参数取定值,例如 $u=$常数,则 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 事实上都是单参数 v 的函数,这时(1′)就表示曲面上的一条曲线. 假如更改 u 所取的这个常数值,就得到曲面上的单参数曲线族,我们称它为 **v 曲线**或**曲线 $u=$常数**. 同样,定义 **u 曲线**或**曲线 $v=$常数**. 用这种方法得到的两系曲线,称为曲面的**参数曲线**或**坐标曲线**.

为简便起见,曲面上的点常用它的参数值 (u,v) 表示;而且从点 (u,v) 到点 $(u+du,v+dv)$ 的方向则简单地记成 $du:dv$ 或 $\frac{du}{dv}$,它表示曲面上的方向 $d\boldsymbol{r}=(dx,dy,dz)$.

现在我们在曲面上一点 (u,v) 处取两个方向 $du:dv$ 和 $\delta u:\delta v$ (或简单地称为两个方向 d 和 δ),设它们的交角是 ω. 那么,它们

交角的余弦是

$$\cos\omega=\frac{d\boldsymbol r\cdot\delta\boldsymbol r}{|d\boldsymbol r|\,|\delta\boldsymbol r|}$$

$$=\frac{E\,du\delta u+F\,(du\delta v+dv\delta u)+G\,dv\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}.\qquad(5)$$

特别地，通过曲面上各点(u_0,v_0)，我们引两条参数曲线 $v=v_0$ 和 $u=u_0$ 的切线. 注意到沿前一条曲线时仅仅是u在变动，沿后一条曲线时仅仅是v在变动，所以它们对应的方向分别是 $du:dv=1:0$ 和 $\delta u:\delta v=0:1$，也就是

$$d\boldsymbol r=\boldsymbol r_u du,\quad \delta\boldsymbol r=\boldsymbol r_u\delta v.\qquad(6)$$

因此两参数曲线的交角ω根据(5)就变为公式

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}.\qquad(7)$$

由(7)我们还得到

$$\sin\omega=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}.\qquad(8)$$

于是我们已证得下面的结果：

曲面上的两系参数曲线构成直交系统的充要条件是

$$F=0.\qquad(9)$$

现在我们在曲面上取由两条邻近的u曲线和两条邻近的v曲线构成的微小四边形$PP'P''P'''$(图 14)，设它的四个顶点的曲线坐标分别是

$$P(u,v),\quad P'(u+du,v),\quad P''(u+du,v+dv),\quad P'''(u,v+dv),$$

为了求这微小四边形的面积，在du,dv的一阶小量的范围内，我们有

$$\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol r(u+du,v)-\boldsymbol r(u,v)=\boldsymbol r_u(u,v)\,du+\cdots,$$

$$\overrightarrow{PP'''}=\boldsymbol r(u,v+dv)-\boldsymbol r(u,v)=\boldsymbol r_v(u,v)\,dv+\cdots.$$

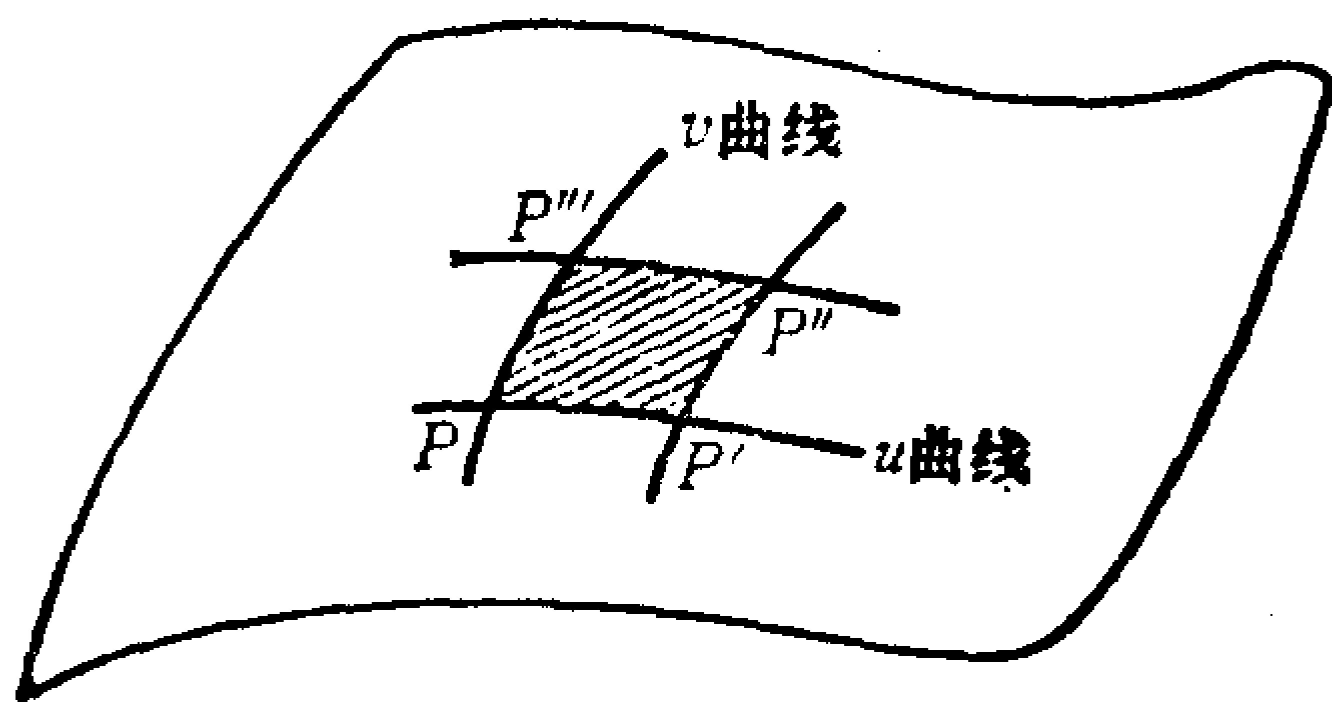


图 14

我们把由$|\overrightarrow{PP'}|$，$|\overrightarrow{PP'''}|$为一组邻边构成的平行四边形面积的无穷小主部定义为曲面上微小四边形 $PP'P''P'''$ 的面积，记为 dS，也就是

$$\begin{aligned} dS &= |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv \\ &= |\boldsymbol{r}_u| \cdot |\boldsymbol{r}_v| \cdot \sin \angle P'PP'''. \end{aligned}$$

注意到公式(4)和(8)，我们得到

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{10}$$

dS 称为曲面的**面积元素**.

例 设曲面的表示是 Monge 形式的方程

$$z = f(x, y).$$

试求曲面的第一基本量和面积元素.

这时曲面的向量表示为

$$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

若记$\frac{\partial f}{\partial x} = p$，$\frac{\partial f}{\partial y} = q$，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_x &= (1, 0, p), \\ \boldsymbol{r}_y &= (0, 1, q), \end{aligned}$$

所以第一基本量为

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

而面积元素则为

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

后者就是在普通微积分学中常见的计算曲面表面积的面积元素.

2. 曲面的法线和切平面

对经过点(u,v)的两条参数曲线，它们的切线方向已由前段公式(6)，也就是$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$所决定. 今后如无特别声明，我们总是假定成立$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$. 现在我们在点$(u,v)$ 引一条直线与这两条切线相垂直，并设$\boldsymbol{n}$是所引直线的单位向量，则$\boldsymbol{n}$决定于下列公式

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|},\tag{1}$$

也就是

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{y_uz_v-y_vz_u}{\sqrt{EG-F^2}},\ \frac{z_ux_v-z_vx_u}{\sqrt{EG-F^2}},\ \frac{x_uy_v-x_vy_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right).\tag{2}$$

在点(u,v)我们引方向为d的切线，也就是说它的方向决定于

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv.$$

因为$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=0,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0$，所以对所有切线

$$\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=0.$$

换句话说，在(u,v)点以$\boldsymbol{n}$ 为方向所作的直线垂直于同一点的**所有切线**. 由此我们知道，曲面在其一点处的切线都在同一平面上. 这个平面称为曲面在这点的**切平面**，它的方程是

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0,\tag{3}$$

式中的$\boldsymbol{\rho}=(\xi,\eta,\zeta)$是切平面上动点的向量表示，而$\boldsymbol{n}$和$\boldsymbol{r}$则在$(u,v)$点取值. 根据(1)，方程(3)可改写为

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)\equiv\begin{vmatrix}\xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}=0.\tag{4}$$

我们在(u,v)点且以$\boldsymbol{n}$为方向所引的直线，称为曲面在这点的**法

线,它的方程是

$$\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}=\lambda \boldsymbol{n}, \tag{5}$$

式中,λ 是参数.

例 1 写出以原点为中心,a 为半径的球面的参数表示.

我们利用球面坐标,便可写出其上一点的表示为

$$\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=(a\cos\theta\cos\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\varphi), \tag{6}$$

式中的 θ,φ 表示经纬度. 这时,曲线 $\theta=$常数是**子午线**; 曲线 $\varphi=$常数是**平行环**,而且球面的线素是

$$ds^2=a^2(\cos^2\varphi\cdot d\theta^2+d\varphi^2). \tag{7}$$

从此我们知道,子午线与平行环直交.

例 2 求一条挠曲线的切线面线素和切平面.

设曲线 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$ 的弧长为 s,则它的切线面决定于下列方程

$$\boldsymbol{\rho}(s,t)=\boldsymbol{r}(s)+t\boldsymbol{T}(s), \tag{8}$$

式中,t 是独立参数. 根据

$$\boldsymbol{\rho}_s=\boldsymbol{T}+\frac{t}{r}\boldsymbol{N}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\rho}_t=\boldsymbol{T},$$

我们得到 $E=1+\frac{t^2}{r^2}, F=1, G=1$,于是切线面的线素是

$$ds^2=\left(1+\frac{t^2}{r^2}\right)ds^2+2ds\,dt+dt^2.$$

当 $t\neq0$ 时,在点 (s,t) 处的切平面方程应该是

$$(\overline{\boldsymbol{\rho}}-(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{T}),\boldsymbol{\rho}_s,\boldsymbol{\rho}_t)=0,$$

式中的 $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ 是切平面上动点的向量表示. 根据(9),上式可化简为

$$(\overline{\boldsymbol{\rho}}-\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s))=0,$$

这恰好表示原曲线在 s 点的密切平面. 如果 $t=0$,则所求的切平面就变为不定,所以原曲线上的任何一点都是它的切线面的奇点,

称脊点.

3. 第二基本形式

在曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的一点 (u,v) 处，我们作曲面的切平面，并从它的邻近点 $(u+du, v+dv)$ 引这个切平面的垂线，那么这个垂直距离应是 du, dv 的两阶无穷小量，而其主要部分则等于

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

我们把这距离两倍的主要部分定义为**第二基本形式** φ，也就是

$$\varphi=\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

然而 $\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=0$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}$，于是

$$\varphi=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2, \tag{3}$$

式中

$$\begin{aligned} L&=-\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\\ 2M&=-(\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_u),\\ N&=-\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_v. \end{aligned} \tag{4}$$

我们从 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0$ 容易求得

$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=0,\quad \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=0,$$

$$\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=0,\quad \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=0.$$

于是我们得到

$$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu},\quad M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},\quad N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}, \tag{5}$$

或者依照前一段的等式(1)，它们可改写为

$$\begin{aligned} L&=\frac{(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uu})}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|},\\ M&=\frac{(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uv})}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|},\\ N&=\frac{(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{vv})}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}. \end{aligned} \tag{6}$$

L, M, N 称为曲面的**第二基本量**.

例 当曲面的方程取 Monge 形式时,

$$z=f(x,y).$$

如果我们记 $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, 则容易求得

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

习 题

1. 将一条平面曲线绕它所在平面上的一条定直线旋转时，所得的曲面称为**旋转面**,定直线称为**轴**. 绕 z 轴旋转所得的旋转面的方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(p(u)\cos v, p(u)\sin v, q(u)).$$

u=常数的参数曲线都是圆，称为**平行环**，而 v=常数的参数曲线称为**子午线**. 如果我们用经过 z 轴的平面去截曲面,并以截线的弧长作为参数 u,则

$$p'^2+q'^2=1.$$

试用此式计算曲面的线素,并且证明旋转面的法线均与轴共面.

2. 设椭圆面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2>c^2>0).$$

它上面的任何一点可看成是这个椭圆面和另外两个曲面

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_i}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_i}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_i}=1 \qquad (i=1,2)$$

的交点,由此解出 x^2, y^2, z^2 的结果是

$$x^2=\frac{a^2(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2=\frac{b^2(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2=\frac{c^2(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

(λ_1, λ_2) 称为**椭圆坐标**. 证明曲面线素为

$$ds^2=\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)\left\{\frac{\lambda_1(d\lambda_1)^2}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}-\frac{\lambda_2(d\lambda_2)^2}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}\right\}.$$

§ 14. 极小曲线 渐近曲线

设曲面的表示为 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),\ z(u,v))$. 如果在 u,v 之间存在函数关系，即成立关系式

$$f(u,v)=0, \text{或者 } u=\varphi(v), \text{或者 } v=\psi(u), \tag{1}$$

则曲面上的对应点就仅与单参数有关，于是它的轨迹便是一条曲线，特别地，取 $\varphi(v)$ 和 $\psi(u)$ 分别等于常数，我们就得到前面所提的参数曲线.

其次，设已知微分方程

$$A(u,v)\,du+B(u,v)\,dv=0, \tag{2}$$

根据微分方程的理论知道，存在积分因子 $I(u,v)$，使得

$$I(u,v)\{A(u,v)\,du+B(u,v)\,dv\}$$

化为全微分 df，于是(2)可改写为

$$df=0.$$

积分后得，$f(u,v)=$任意常数. 所以形式为(2)的微分方程表示曲面上的一系单参数曲线族.

1. 极小曲线

我们来讨论微分方程

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=0. \tag{3}$$

因为左侧是 du,dv 的两个线性形式的乘积，所以(3)的解表示曲面上两系单参数曲线族. 由于沿族中的各条曲线 $ds^2=0$，因此我们称之为**极小曲线**. 在实曲面上必存在两系虚的极小曲线. 这是因

为，二次微分形式 $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 的判别式等于

$$EG-F^2,$$

而根据定义

$$EG-F^2=|\boldsymbol{r}_u|^2|\boldsymbol{r}_v|^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2\geqq 0.$$

当 x,y,z 都是实值函数时，上式中的等号只在

$$y_uz_v-y_vz_u=z_ux_v-z_vx_u=x_uy_v-x_vy_u=0$$

时成立．但这说明 x,y,z 三个变量中至多只有一个是独立的，也就是曲面退化为曲线或一个点，不属于讨论之列，因此在实曲面上一定成立 $EG-F^2>0$.

假如一张虚曲面满足条件 $EG-F^2=0$，则它就称为**Monge曲面**．对这种曲面的研究不在本书讨论的范围内．

我们现在来证明一个定理：

在实曲面上的一点，所作的极小曲线的切线必定经过曲面在这点切平面上的无限远虚圆点．

如果用 $t=\dfrac{du}{dv}$ 表示极小曲线的切线方向，则我们有

$$Et^2+2Ft+G=0. \tag{4}$$

设这个方程的两个根为 t_1,t_2，并设从 (u,v) 出发的另外两个方向为 $T_1=\dfrac{du}{dv}$，$T_2=\dfrac{\delta u}{\delta v}$．使得 T_1,T_2 共轭于 t_1,t_2 的充要条件是

$$ET_1T_2+F(T_1+T_2)+G=0, \tag{5}$$

也就是

$$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v=0.$$

然而这正好是两方向 T_1,T_2 直交的条件[参考§13.1，公式(5)]．因此，与两极小方向共轭的两个方向必定直交，于是以 t_1,t_2 为切方向的切线必定是与直交直线对合的复直线，从而经过两圆点．

例 单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的极小曲线是两系母线．

令

$$\frac{x+iy}{1-z}=\frac{1+z}{x-iy}=u,$$

$$\frac{x-iy}{1-z}=\frac{1+z}{x+iy}=v,$$

于是我们可解得

$$x=\frac{u+v}{uv+1},\quad y=\frac{i(v-u)}{uv+1},\quad z=\frac{uv-1}{uv+1}.$$

由此可计算出线素是

$$ds^2=\frac{4du\,dv}{(uv+1)^2}.$$

所以我们看到，u 和 v 这两系参数曲线一方面表示球面上的极小曲线，另一方面则表示球面上的两族虚直线.

注意 织面上的母线并不是极小曲线.

2. 渐近曲线

渐近曲线，又称为**主切曲线**，有以下三种定义方法.

定义 1 如果曲面上的曲线在各点的密切平面都与曲面在同一点的切平面重合，那么这种曲线称为**渐近曲线**.

设所求的曲线由方程

$$u=u(t),\qquad v=v(t)$$

所定义，则我们有

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$
$$+\boldsymbol{r}_u\frac{d^2u}{dt^2}+\boldsymbol{r}_v\frac{d^2v}{dt^2}.$$

然后，根据定义，这时曲面的单位法线方向 $\boldsymbol{n}$ 应该同曲线密切平

面的法方向$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$平行，所以除了$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0$以外，还必须满足等式

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0.$$

改写后，便有

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu})\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv})\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv})\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=0,$$

也就是说，所求的渐近曲线满足微分方程

$$L du^2+2M du\,dv+N dv^2=0. \tag{1}$$

由此我们知道，如果把虚曲线也包括在内的话，一般在曲面上总有两系单参数的渐近曲线族.

注意 如果曲面的方程取 Monge 形式 $z=f(x,y)$，则渐近曲线的微分方程是

$$r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2=0. \tag{2}$$

定义 2 如果曲面上一条曲线在各点的切线与曲面有三点接触，那么这曲线称为渐近曲线.

在这曲线上取一点作为原点 O，并把曲面在这点的切平面取为 xy 平面，则在 O 点我们就有 $p=q=0$，于是曲面在 O 近旁就有展开式

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+R, \tag{3}$$

式中 r,s,t 分别表示$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$在 O 点的值，而余项 R 则至少是 x,y 的三阶量.

现在我们在 O 点作所论曲线的切线，方向是$\frac{dy}{dx}=\rho$，它的方程便应该是

$$z=y-\rho x=0. \tag{4}$$

根据(3)与(4)我们容易知道这条切线与曲面的交点应由

$$\frac{1}{2}(r+2s\rho+t\rho^2)x^2+R=0$$

所决定. 在略去三阶和三阶以上小量的范围内，一般可得一个重根 $x=0$，所以此切线一般与曲面有两点接触. 如果方向 $\rho=\frac{dy}{dx}$满足条件

$$r+2s\rho+t\rho^2=0,$$

那么切线与曲面就有三点接触. 然而最后条件与(2)一致，所以我们知道定义 1,2 是等价的.

至于定义 3，则要依照下段叙述的共轭切线的概念导出.

3. 共轭曲线网

经过曲面上一点 P，引曲面的曲线 C，并且在 C 上取点 Q，设 l 是曲面在 P,Q 的两切平面的交线. 当 Q 点沿 C 趋近于 P 时，l 的极限位置与 C 在 P 的切线称为**共轭切线**.

设 $du:dv$ 和 $\delta u:\delta v$ 是共轭切线的方向. 根据假定，沿 C 的方向 d，两个法向 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}+d\boldsymbol{n}$ 都垂直于方向 δ，但是 $\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v\delta v=0$ 总成立，所以方向 δ 是方向 d 的共轭方向的条件就为

$$(\boldsymbol{n}+d\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{r}=0,$$

也就是

$$d\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0,$$

或者按照 L,M,N 的定义，把它改写为

$$L\,du\delta u+M(du\delta v+dv\delta u)+N\,dv\delta v=0. \tag{1}$$

这个条件关于 d 和 δ 是对称的，所以 d 也是方向 δ 的共轭方

向．如果一个方向 d 与自身共轭，则

$$L du^2+2M du dv+N dv^2=0,$$

也就是 d 为渐近曲线的方向，于是我们得到下面的

定义 3 若曲面上一条曲线的切线与自身共轭，则这条曲线称为**渐近曲线**．

从(1)容易知道，两系参数曲线 u, v 互为共轭的条件是

$$M=0, \tag{2}$$

即

$$(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_{uv})=0.$$

所以曲面上点的坐标 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 必满足同一个 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}+a\frac{\partial \theta}{\partial u}+b\frac{\partial \theta}{\partial v}=0, \tag{3}$$

式中 $a=a(u,v)$, $b=b(u,v)$

反过来，假如 x, y, z 满足(3)，则(2)必然成立，于是 u 曲线与 v 曲线便构成共轭曲线．这时我们就称它们构成**共轭网**．

例 1 设 u, v 曲线在曲面 S: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上构成共轭网，则曲面 S_1

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\frac{1}{b}\boldsymbol{r}_u \tag{4}$$

和曲面 S_{-1}

$$\boldsymbol{r}_{-1}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{a}\boldsymbol{r}_v \tag{5}$$

也是以它们的 u, v 曲线为共轭网的．S_1 和 S_{-1} 分别称为 S 的**正向 Laplace 变换**和**负向 Laplace 变换**．

例 2 假设在曲面 S 上已知两系单参数曲线族．如果沿第一系中任何一条曲线引第二系曲线的切线，这些切线全体是单参数直线族，而它们构成一个可展曲面的话，那么交换两系位置时也有

同样的性质，并且两系曲线构成一个共轭网．反过来，一个共轭网的两系曲线必有上述的性质．

§15. 曲面上曲线的曲率

1. 法曲率

设曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一条曲线 C 的弧长为 s，这时它的点的坐标 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 都是 s 的函数．我们可用

$$u=u(s),\quad v=v(s) \tag{1}$$

来表示 C，而且用$'$，$''$等表示关于 s 的微分，即

$$u'=\frac{du}{ds},\ v'=\frac{dv}{ds},\ u''=\frac{d^2u}{ds^2},\ \cdots,$$

于是 C 的单位切线向量

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}_u u'+\boldsymbol{r}_v v'. \tag{2}$$

再关于 s 微分，则得到

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\boldsymbol{r}_{uu}u'^2+2\boldsymbol{r}_{uv}u'v'+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2+\boldsymbol{r}_u u''+\boldsymbol{r}_v v''. \tag{3}$$

设曲线 C 在 s 点的曲率半径为 r，而且它的主法线与曲面法线的交角为 σ，我们从(3)及 $\cos\sigma=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}$ 易得

$$\frac{\cos\sigma}{r}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{d\boldsymbol{T}}{ds},$$

也就是

$$\frac{\cos\sigma}{r}=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

或改写为

$$\frac{\cos\sigma}{r}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{4}$$

然而(4)的右侧在 s 点仅仅决定于方向 $du:dv$，所以我们得到下列

定理:

在曲面上任何一定点作曲面上任何曲线 C,使 C 与给定切线 t 在 P 相切,则曲线 C 在 P 点的曲率半径与 $\cos\sigma$ 的比值是常数.

通过曲面在 P 点的切线 t 和法线 n 作平面 π,这平面与曲面的交线称为曲面属于切线 t 的**法截线**. 法截线在 P 点也与 t 相切,而且主法线重合于曲面法线 n,也就是 $\sigma=0$ 或 $\sigma=\pi$. σ 取值 0 或 π,则取决于法截线在 P 点向曲面法线正向或负向弯曲.

我们用 r_n 表示法截线在 P 点的曲率半径,并且定义 R 如下:当 $\sigma=0$ 时,$R=r_n>0$;当 $\sigma=\pi$ 时,$R=-r_n<0$. 于是由(4)得到

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos\sigma}{r}, \tag{5}$$

式中

$$\frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2} \tag{6}$$

称为曲面在 P 点属于方向 $du:dv$ 的**法曲率**.

2. Meusnier 定理(1776)

在曲面上点 P 处作定切线 t,假设 t 的方向不是渐近方向. 过 t 作平面与曲面相交,其交线 C 在 P 处的密切圆轨迹为球面.

证明 不妨假定曲面在 P 点沿 t 方向的法曲率 $\frac{1}{R}>0$,不然可用调整曲面法线正向的方法来满足这要求. 设 C 在 P 的曲率半径是 r,且它的主法线与曲面法线的交角为 σ,则

$$\frac{\cos\sigma}{r}=\frac{1}{R},$$

即

$$r=R\cos\sigma.$$

但是R仅由t所决定，所以C在P点的密切圆就始终落在中心为$(\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{n})|_P$，半径为$R$的球面上.　　　　证毕.

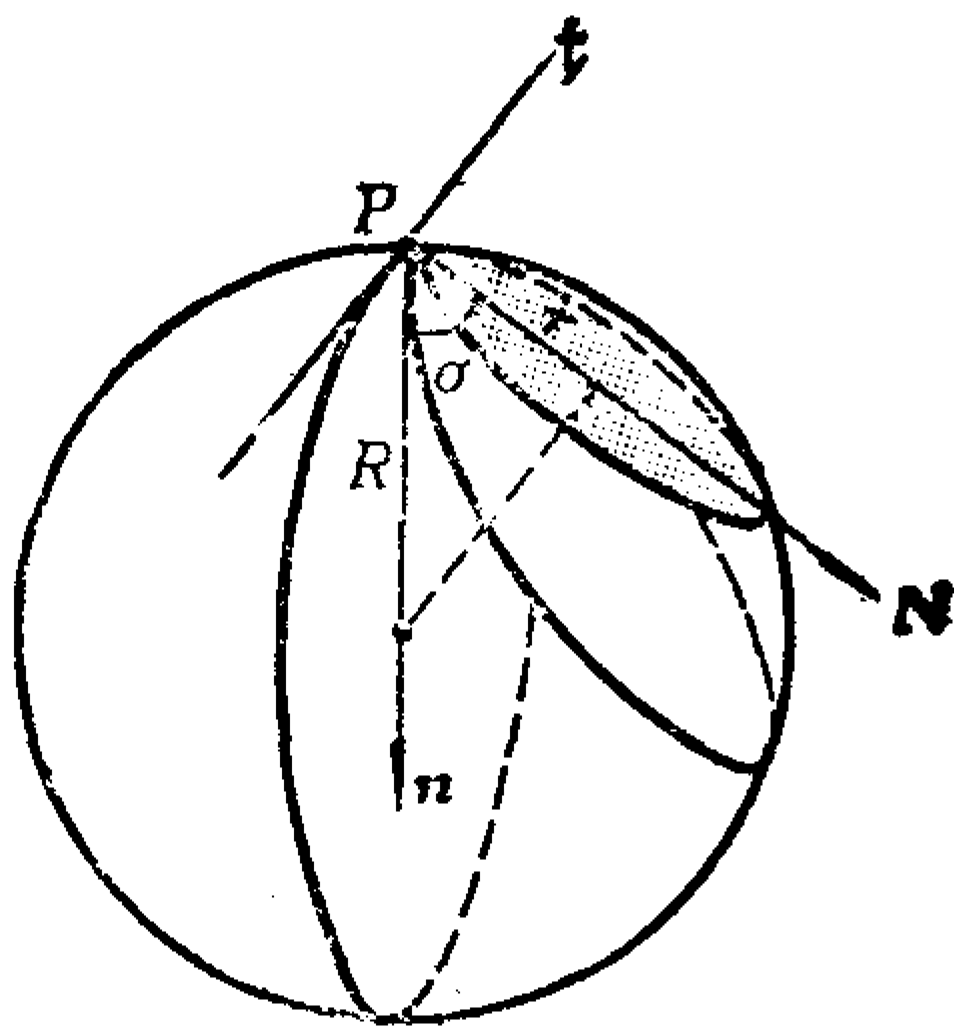


图　15

3. 总曲率　平均曲率

如果记$\frac{du}{dv}=t$，则

$$\frac{1}{R}=\frac{Lt^2+2Mt+N}{Et^2+2Ft+G}. \tag{1}$$

现在我们来改写这个关系式，

$$(ER^{-1}-L)t^2+2(FR^{-1}-M)t+GR^{-1}-N=0, \tag{2}$$

进而，根据$\frac{\partial}{\partial t}R^{-1}=0$求出那些可能使$R^{-1}$达到极大值或极小值的方向$t$，以及对应的$R^{-1}$.

关于t微分(2)式，并利用(2)本身，我们容易导出所求的R^{-1}和方向$t=du:dv$满足的下列方程组：

$$\begin{aligned}&(ER^{-1}-L)du+(FR^{-1}-M)dv=0,\\&(FR^{-1}-M)du+(GR^{-1}-N)dv=0.\end{aligned} \tag{3}$$

由此消去R^{-1}后我们得到

$$\begin{vmatrix}E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv\\ L\,du+M\,dv & M\,du+N\,dv\end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

也就是

$$(EM-FL)\,du^2+(EN-GL)\,du\,dv+(FN-GM)\,dv^2=0. \tag{5}$$

方程(5)决定的两个方向称为**主方向**. 沿主方向进行的曲线称为**曲率线**. 从下面的两个恒等式

$$(EM-FL)G-(EN-GL)F+(FN-GM)E\equiv 0,$$

$$(EM-FL)N-(EN-GL)M+(FN-GM)L\equiv 0,$$

我们容易证明两系曲率线不仅直交，而且共轭. 反过来的事实也成立.

如果从(3)式消去 $du:dv$，那么可以得到

$$\frac{1}{R^2}(EG-F^2)-\frac{1}{R}(EN-2FM+GL)+LN-M^2=0, \tag{6}$$

它的两个根$\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$便是法曲率的极大值与极小值，称为**主曲率**. 由(6)我们导出

$$\begin{aligned} K&\equiv\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},\\ 2H&\equiv\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

K 称为**总曲率**或 Gauss **曲率**，最初见于 Gauss 的工作(1823)；H 则称为**平均曲率**，最初由 Sophie Germain(1831)所发现.

假如在曲面上所讨论的一点处方程(5)是恒等式，那么主方向就变为不定. 这时在此点成立关系式

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N}. \tag{8}$$

这种奇异点称为**脐点**. 例如，球面上任何点都是脐点.

4. Euler 定理 Dupin 标线

为了导出两个主曲率$\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$与一般方向的法曲率之间的关系，

较为方便的是把曲率线取为参数曲线. 这时，因为参数曲线既直交又共轭，所以我们有

$$F=0,\quad M=0. \tag{1}$$

又从

$$\frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+N\,dv^2}{E\,du^2+G\,dv^2} \tag{2}$$

得到 u 曲线与 v 曲线的法曲率

$$\frac{1}{R_1}=\frac{L}{E},\quad \frac{1}{R_2}=\frac{N}{G}, \tag{3}$$

因此可把(2)改写为

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}\left(\frac{\sqrt{E}\,du}{ds}\right)^2+\frac{1}{R_2}\left(\frac{\sqrt{G}\,dv}{ds}\right)^2. \tag{4}$$

设方向 $du:dv$ 与曲率线 u(即 $v=$常数)的交角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{E}\,du}{ds},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{G}\,dv}{ds}, \tag{5}$$

于是我们就可改写(4)如下：

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{6}$$

这就是 Euler 定理(1760).

现在在直交坐标(x,y)的平面上作圆锥曲线

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=1. \tag{7}$$

它的点的极坐标(r,θ)应满足方程

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}, \tag{8}$$

所以 $r^2=R$(图 16)

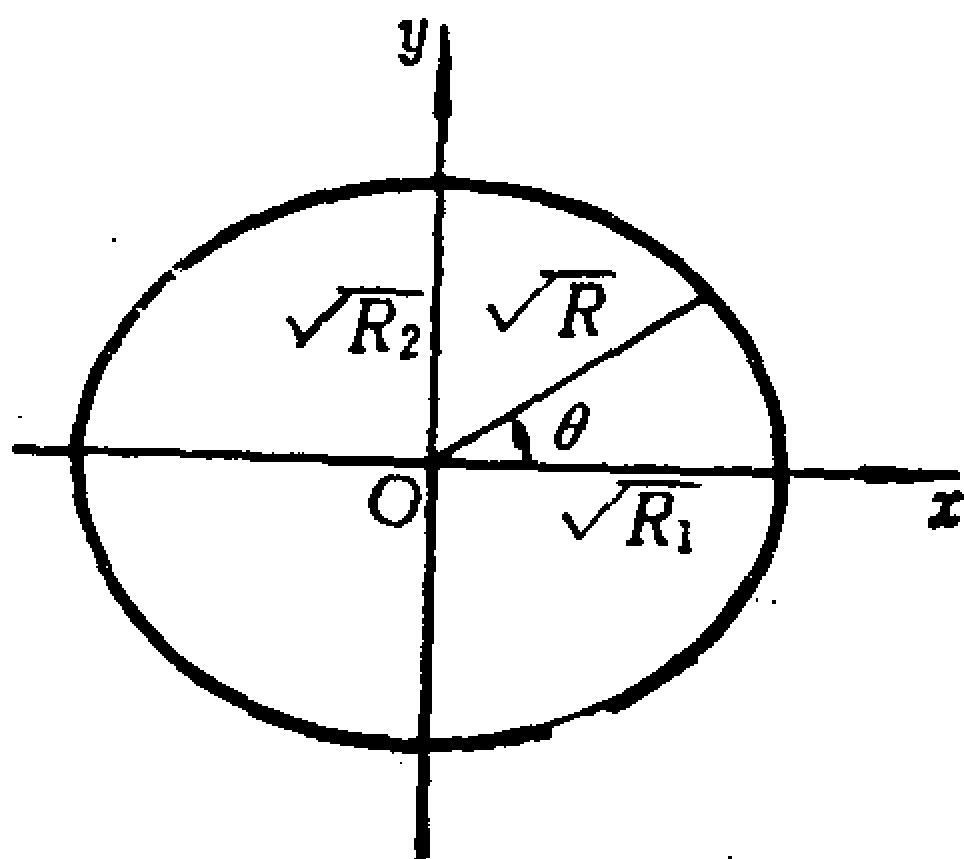


图 16

这条圆锥曲线称为Dupin 标线. 当它是椭圆或双曲线时，所讨论曲面点的总曲率 $K>0$ 或 <0，即 $LN-M^2>0$ 或 <0. 因此这点称为曲面

的椭圆点或双曲点.

尤其要注意的是,圆锥曲线的渐近线与曲面的渐近方向一致,这也是曲面上渐近曲线命名的由来.

习　题

1. 证明:在任何直纹面上,任何四条给定渐近曲线与直母线的四个交点的交比是定值(Serret).

2. 设空间曲线的方程是

$$r(t)=(t^n, t^{n-1}, t^{n-2}).$$

试求曲线弦的中点轨迹,并且决定它的渐近曲线.

3. 证明:曲面的渐近曲线在射影变换下是不变的.

4. 证明:$H=0$ 是曲面的渐近曲线构成直交系统的充分必要条件.

这种曲面称为**极小曲面**.

5. 设$MM'=ds$是曲面上的一段无穷小曲线弧,ε是它两个端点处曲面法线的交角,而ω则是曲线弧在M处的切线与它共轭切线间的交角. 证明

$$\left(\frac{\varepsilon}{ds}\right)^2+\frac{\varepsilon}{ds}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\sin\omega+\frac{1}{R_1R_2}=0.$$

6*. 假如在Meusnier定理中用密切圆锥曲线代替密切圆,则它的轨迹为织面. (Moutard, 1863)

这个织面称为属于所取切线 t 的 Moutard **织面**.

7. 在曲面上一点任意引m条切线,使它们顺次成$\frac{2\pi}{m}$角. 设$\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$为各切线与该点法线所决定的平面截线的曲率半径. 证明:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\cdots+\frac{1}{\rho_m}\right)=H.$$

[注意,$1+e^{\frac{4\pi}{m}i}+e^{\frac{8\pi}{m}i}+\cdots+e^{\frac{m-1}{m}4\pi i}\equiv 0$,所以

$$\sum_{k=0}^{m-1}\cos 2\left(\theta+\frac{2k}{m}\pi\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\sin 2\left(\theta+\frac{2k}{m}\pi\right)=0.$$

再应用 Euler 定理,容易得到上列结果.]

§16. 曲 率 线

1. 曲率线的新定义

在前一节我们已定义过曲面的曲率线，现在来给出它的新定义.

定义 设C是曲面上的曲线，当C上各点所作的曲面法线全体构成可展曲面时，C称为曲面的**曲率线**.

设曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$上的这条曲线C由$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(u(s),v(s))$给出，$s$是$C$的弧长参数. 曲面沿$C$的法线构成直纹面$\boldsymbol{r}(s)+t\boldsymbol{n}(s)$，这里的$\boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{n}(u(s),v(s))$表示曲面沿$C$的单位法向量. 根据可展曲面的条件，由第一章§11(4)式我们知道，沿曲线C应成立

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\boldsymbol{n},\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)=0. \tag{1}$$

所以，存在不全为零的函数$a(s)$，$b(s)$，$c(s)$使得

$$a\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+b\boldsymbol{n}+c\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=0.$$

注意到$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\cdot\boldsymbol{n}=0$，便有$b=0$. 由于$a\neq0$，我们得到

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=-r\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{2}$$

如果我们仅用d表示沿曲率线C变动时的微分记号，则(2)又可简写成

$$d\boldsymbol{r}=-r\,d\boldsymbol{n}, \tag{3}$$

换句话说，当沿曲率线进行时，点坐标的微分所决定的方向$d\boldsymbol{r}$与曲面单位法向量的微分所决定的方向$d\boldsymbol{n}$平行，而且其逆亦真.

方程(3)称为O. Rodriques公式.

其次，我们将阐明本节定义的曲率线与前一节所定义的曲率

线完全一致.

由(3)式我们得到

$$\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv+r(\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv)=\mathbf{0}. \tag{3'}$$

将 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 分别与(3′)的两端作内积并注意到第一、第二基本量的定义，我们就有

$$\begin{aligned} E\,du+F\,dv-r(L\,du+M\,dv)=0,\\ F\,du+G\,dv-r(M\,du+N\,dv)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

由此消去 r，则得到 §15.3(4)的同一方程

$$\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & L\,du+M\,dv \\ F\,du+G\,dv & M\,du+N\,dv \end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

所以本节所定义的曲率线也是前节所定义的曲率线. 反过来，由(5)可以得(4). 注意到在每一点 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{n}$ 构成一个线性独立的向量组，而且 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}=0$，所以(4)也就等价于(3′)，也就是(3)式成立. 因此曲率线的两个定义是等价的.

如果我们从(4)消去 $du:dv$，且比较 §15.3 的(6)，那么容易知道

$$r=R_1 \quad 或 \quad r=R_2. \tag{6}$$

所以沿曲率线的曲面法线构成可展曲面，而且当这个可展曲面是切线面时，其刃线上的点到曲率线上的对应点，它们间的距离等于主曲率半径. 这是因为刃线可表示为

$$\boldsymbol{\rho}(s)=\boldsymbol{r}(s)+a(s)\boldsymbol{n}(s),$$

两端对 s 微分，并注意到 $\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 平行，所以必存在函数 $\sigma(s)$ 使得

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+\frac{da}{ds}\boldsymbol{n}+a\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\sigma\boldsymbol{n},$$

再利用沿曲率线成立的O. Rodriques 方程(3)，在上式中除了 $\frac{da}{ds}=$

σ 以外，还得到我们所要的 $a=r$ 的结论.

例 Joachimsthal 定理(1846)：设两曲面 S_1 与 S_2 相交于曲线 C，并假设 a) S_1 与 S_2 沿 C 交于定角；b) C 是 S_1 的曲率线；c) C 是 S_2 的曲率线. 那么从 a), b), c) 中的任何两个假设都可推出第三个假设.

证明 设 S_1, S_2 的向量表示分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$. 自然沿交线 C 我们有

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(s).$$

我们先假定 b) 与 c) 成立. 根据 O. Rodriques 公式,

$$d\boldsymbol{r}=-r_1 d\boldsymbol{n}_1, \qquad d\boldsymbol{r}=-r_2 d\boldsymbol{n}_2$$

就沿 C 成立，这里的 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 分别是 S_1, S_2 的单位法线向量. 所以，沿 C 便有

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2) &= d\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_1\cdot d\boldsymbol{n}_2 \\ &= -\frac{1}{r_1}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2-\frac{1}{r_2}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1=0, \end{aligned}$$

也就是 a) 成立.

其次，假定 a) 与 b) 成立，则沿 C 成立

$$d\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_1\cdot d\boldsymbol{n}_2=0$$

以及

$$d\boldsymbol{r}=-r_1 d\boldsymbol{n}_1.$$

但是，我们总有 $\boldsymbol{n}_2\cdot d\boldsymbol{r}=0$，所以

$$\boldsymbol{n}_1\cdot d\boldsymbol{n}_2=-d\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\frac{1}{r_1}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2=0.$$

另外又有

$$\boldsymbol{n}_1\cdot d\boldsymbol{r}=0, \qquad \boldsymbol{n}_2\cdot d\boldsymbol{n}_2=0,$$

于是两个方向 $d\boldsymbol{r}$ 与 $d\boldsymbol{n}_2$ 都和 $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ 相直交，因此，沿 C 就应该成立 $d\boldsymbol{r}=-r_2 d\boldsymbol{n}_2$，也就是 c) 成立.　　　　证毕.

2. Darboux 定理

设三个函数$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$为微分方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=A(u,\ v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u,\ v)\frac{\partial\theta}{\partial v} \tag{1}$$

的独立解，并且$x^2+y^2+z^2$也是这方程的一个解，则曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),\quad y(u,v),\quad z(u,v)) \tag{2}$$

的参数曲线是它的曲率线，而且其逆亦真.

证明 因曲面(2)的坐标x, y, z满足同一个方程(1)，所以它的两系参数曲线u曲线($v=\text{const}$)和v曲线($u=\text{const}$)就构成共轭网. 因此，我们只要说明它们是直交的就可以了.

依照假设，函数

$$w=x^2+y^2+z^2 \tag{3}$$

也满足方程(1)，即

$$w_{uv}=Aw_u+Bw_v, \tag{4}$$

但是

$$w_u=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_u,\qquad w_v=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_v,$$

$$w_{uv}=2\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v+2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=2F+2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},$$

把这三式代入(4)，化简后我们便得到

$$F=0, \tag{5}$$

所以参数曲线构成直交系统[参见 §13.1].

以上的计算是可逆的，因此我们知道其逆亦真. 证毕.

Darboux 把上述定理用来证明下面的 Lie 定理(1872).

Lie 定理 *在反演群的作用下，曲面的曲率线仍变为曲率线.*

证明 设曲面S的向量表示为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),\quad y(u,v),\quad z(u,v)),$$

而且参数曲线u, v是曲率线，那么根据 Darboux 定理，$\boldsymbol{r}$的分量

函数 x, y, z 以及 $x^2+y^2+z^2$ 都满足同一个微分方程

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}=A\frac{\partial \theta}{\partial u}+B\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{1}$$

为了简便起见，我们把单位球面取为反演球，于是变换后的曲面 $\bar{S}$ 应由

$$\bar{\boldsymbol{r}}(u,v)=\frac{\boldsymbol{r}(u,v)}{|\boldsymbol{r}(u,v)|^2}$$

定义，也就是 $\bar{S}$ 的三个分量函数为

$$\bar{x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \bar{y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \bar{z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

我们需要证明的是，$\bar{S}$ 仍以参数曲线为曲率线. 记

$$\theta=w\bar{\theta},\quad w=x^2+y^2+z^2, \tag{3}$$

则微分方程(1)就化为

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial u \partial v}=\bar{A}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial u}+\bar{B}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial v}+\bar{C}\bar{\theta}. \tag{4}$$

然而函数 w 已知是满足(1)的，所以 $\bar{\theta}=1$ 必定满足(4)，于是 $\bar{C}=0$. 因此，(4)就可改写为

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial u \partial v}=\bar{A}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial u}+\bar{B}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial v}. \tag{5}$$

又因为 x, y, z 为(1)的解，所以根据 (2) 定义的三个函数 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 都是(5)的解. 另外，从 $\theta=1$ 满足(1)的事实我们容易知道 $\bar{\theta}=\frac{1}{w}\equiv\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2$ 也满足(5). 因而根据 Darboux 定理，曲面 $\bar{\boldsymbol{r}}(u,v)=(\bar{x}(u,v),\bar{y}(u,v),\bar{z}(u,v))$ 的参数曲线是曲率线. 证毕.

3. 曲率线的又一个定义

如在 § 14.2 中所述，当曲面的方程取 Monge 形式 $z=f(x,y)$ 时，以曲面上一点为原点 O，并以 O 点的切平面为 xy 平面，我们在 O

点的近旁可把曲面表示写成下列的展开式：

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+R, \tag{1}$$

式中，R 至少是 x,y 的三阶量．我们假定在点 O 与曲面相切的一个球面是

$$z=\frac{1}{2h}(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2h}(x^2+y^2)+R_1, \tag{2}$$

式中，余项 R_1 至少是 x,y 的四阶量．

这球面与曲面的交线以原点为节点或孤立点，而且它的两节切线的方程应为

$$z=0,\quad \left(r-\frac{1}{h}\right)x^2+2sxy+\left(t-\frac{1}{h}\right)y^2=0. \tag{3}$$

特别地，当交线以原点为尖点时，h 必须满足

$$s^2=\left(r-\frac{1}{h}\right)\left(t-\frac{1}{h}\right),$$

也就是 h 是二次方程

$$(s^2-rt)h^2+(r+t)h-1=0 \tag{4}$$

的根．

这时所得的球称为曲率球．曲率球与曲面的交线既然以原点为尖点，必定有尖点切线．我们说，如此所得的尖点切线方向与主方向重合，因为所讨论的切线是由

$$\left(r-\frac{1}{h}\right)x+sy=0 \tag{5}$$

定义的．从(4)与(5)消去 h，得到

$$sx^2+(t-r)xy-sy^2=0, \tag{6}$$

这就是曲面在 O 点的主方向 $x:y$ 所满足的方程［比较 §15.3 的等式(5)，并注意到在 O 点 $p=q=0$，从而 $E=G=1, F=0, L:M:N=r:s:t$］．由此自然可仿前定义曲率线．

习 题

1. 设曲面的方程为 $F(x,y,z)=0$，证明它的曲率线方程是

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ d\dfrac{\partial F}{\partial x} & d\dfrac{\partial F}{\partial y} & d\dfrac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

2. 试证：曲面 $F(x,y,z)=0$ 的总曲率等于

$$K=-\frac{1}{\left\{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\}^2}\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

3. 试求椭圆面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>b>c>0)$ 的曲率线.

4. 设曲面的参数方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(3u+3uv^2-u^3,\ 3v+3u^2v-v^3,\ 3(u^2-v^2)).$$

证明：*a*）平均曲率 $H=0$；*b*）曲率线都是平面曲线；*c*）渐近曲线都是三次挠曲线.

5. 如果曲面的一条曲率线是平面曲线或球面曲线，则曲面与这曲率线所在的平面或球面必相交于定角.

6. 设曲面的一条渐近曲线在一点的曲率半径为 R_0，并且曲面与此点切平面的交线（切于所讨论渐近曲线的一个分支）在同一点的曲率半径为 R，则 $R_0=\dfrac{2}{3}R$. (Beltrami, 1865)

7. 设曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\left(\sin u\sin v,\ \sin u\cos v,\ \cos u+\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}+f(v)\right).$$

试求它的曲率线，并且证明一系曲率线 (C_1) 都是平面曲线，第二系曲率线 (C_2) 都是球面曲线. 决定 $f(v)$ 使曲线 (C_1) 所在的任何一个平面都与曲面相交于同一角度.

8*. 设C是总曲率$K<0$的曲面上的一条曲线，并且C在点M的密切平面与曲面在M的切平面重合. 设R，T为C在M的曲率半径和挠率半径，R_0为在M与C相切的渐近曲线的曲率半径. 证明：

$$\frac{1}{R}=2\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)\frac{T}{T-\sqrt{-K}}. \qquad \text{(Bonnet, 1863)}$$

9. 用柱面坐标r,θ,z可把曲面的方程表示为

$$z=f(r,\theta),$$

这时曲面的总曲率等于

$$\frac{r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+r\frac{\partial z}{\partial r}\right)-\left(r\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}{\left\{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right\}^2}.$$

10. 试求旋转面在一点的主曲率半径.

11. 当抛物线围绕它的准线旋转时，所生成的旋转面在各点的两个主曲率半径的比是定值.

12. 设曲面$\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$的参数曲线构成共轭网，于是$x,y,z$都满足微分方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=A(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

为了使参数曲线u始终是包络柱面的接触曲线或包络锥面的接触曲线，证明其充要条件是

$$A=0 \quad 或 \quad AB=-\frac{\partial A}{\partial u}.$$

13. 设正圆锥与可展曲面至少在三个邻近有向切平面相切，则它的极限位置称为**密切正圆锥**. 现在于一曲面S的正常点P处决定一条切线t，并且从t上的动点M作S的包络锥面，那么这个包络锥面沿t的密切正圆锥始终与S在P的一个定相切球面相切. (B. Hostinsky, 1909; E. Müller, 1917)

14. 在曲面上的非抛物点P作一条切线t以及母线平行于t的包络柱面. 设这个柱面在P的正截线的曲率半径为r，并且t与一个主方向的交角为φ，证明

$$r=R_1\cos^2\varphi+R_2\sin^2\varphi,$$

这里的R_1,R_2表示主曲率半径. (Blaschke, 1916)

上述两题是 Meusnier 定理和 Euler 定理的对偶定理.

15. 以原点为中心的单位球面为反演球时，反演对应是由方程

$$\bar{x}=\frac{x}{w}, \bar{y}=\frac{y}{w}, \bar{z}=\frac{z}{w} \quad (w=x^2+y^2+z^2)$$

所定义的，这时曲面 $S: \boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ 就变为曲面 $\bar{S}$: $\bar{\boldsymbol{r}}(u,v)=(\bar{x}(u,v), \bar{y}(u,v), \bar{z}(u,v))$. 设 E,F,G,L,M,N 和 $\bar{E},\bar{F},\bar{G},\bar{L},\bar{M},\bar{N}$ 分别为 S 和 $\bar{S}$ 对应的第一，第二基本量，并记 $W=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$，证明

$$\bar{E}=\frac{E}{w^2}, \quad \bar{F}=\frac{F}{w^2}, \quad \bar{G}=\frac{G}{w^2};$$

$$\bar{L}=-\frac{2W}{w^2}E-\frac{1}{w}L,$$

$$\bar{M}=-\frac{2W}{w^2}F-\frac{1}{w}M,$$

$$\bar{N}=-\frac{2W}{w^2}G-\frac{1}{w}N.$$

由此易知两曲面的曲率线互相对应.

16. 设 U_1,U_2,U_3,U_4 仅是 u 的函数，V_1,V_2,V_3,V_4 仅为 v 的函数，而曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\left(\frac{U_1+V_1}{U_4+V_4}, \frac{U_2+V_2}{U_4+V_4}, \frac{U_3+V_3}{U_4+V_4}\right).$$

证明：沿各参数曲线的切平面族必以柱面或锥面为包络，并且两系参数曲线构成共轭网. (Peterson)

17. 经过一条给定直线 p，作一束平面使它们与一个曲面相交于一系曲线. 又从 p 上任一点作曲面的包络锥面，使它们的接触曲线成为一系曲线. 证明这两系曲线构成一个共轭网. (Koenigs)

18. 用直角坐标把曲面的方程写为

$$z=\frac{1}{2}(a_0x^2+a_1y^2)+\frac{1}{6}(b_0x^3+3b_1x^2y+3b_2xy^2+b_3y^3)+\cdots,$$

则在原点成立

$$a_0=\frac{1}{R_1}, \quad a_1=\frac{1}{R_2}, \quad b_0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_1}\right), \quad b_1=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_1}\right)$$

$$b_2=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_2}\right), \quad b_3=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R_2}\right).$$

(Beltrami, 1866)

19. 设 P 是曲面的椭圆点；作 P 的切平面以及与其平行的邻近切平面，

使它与曲面在同一侧，且两平面间的距离等于 h. 用 V 表示曲面被这平面割下的部分与这平面构成的微小部分的体积，而且用 O 表示被割下的曲面部分的表面积. 证明：

$$K=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi h^2}{V}\right)^2,\qquad K=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2\pi h}{O}\right)^2.$$

(Blaschke, 1919)

20. 对于曲面 S，在它各点的法线上截取定距离 n，设它端点的轨迹为 $\bar{S}$. 证明：

1° $\bar{K}=\dfrac{K}{1-2nH+n^2K}$, $\bar{H}=\dfrac{H-nK}{1-2nH+n^2K}$.

2° 记 $M=\int HdS$, dS 为曲面的面积元素，则对于封闭曲面，$M^2-4\pi S$ 是不变量，其中 S 为曲面面积.

21. **平移曲面** $r(u,\ v)=a(u)+b(v)$ 的参数曲线构成直交系统时，必为柱面.

22. 试求曲面 $xyz=1$ 的脐点.

23. 证明椭圆面有四个脐点.

§17. 测地挠率

设曲面上一条曲线的弧长为 s，在点 $P(s)$ 的切线，主法线及从法线的单位方向分别为 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$，并设主法线与曲面法线的交角为 σ. 由于 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 都与 $\boldsymbol{T}$ 垂直，所以我们可写出

$$\sin\sigma=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n},\qquad \cos\sigma=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{1}$$

将第一式的两侧关于 s 微分，利用 Frenet 公式，

$$\cos\sigma\frac{d\sigma}{ds}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

式中的 $\dfrac{1}{\rho}$ 为曲线的挠率. 因此我们得到

$$\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\sigma}{ds}\right)\cos\sigma=\boldsymbol{B}\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}. \tag{2}$$

但是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n})=\sqrt{EG-F^2}, \tag{4}$$

所以，利用行列式的乘法公式，我们可把(2)的右端改为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}&=\left(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n})\\&=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}_v & 0\\ * & * & \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}\\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\cdot\boldsymbol{r}_u & \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\cdot\boldsymbol{r}_v & 0\end{vmatrix}\\&=\frac{\cos\sigma}{\sqrt{EG-F^2}\cdot ds^2}\begin{vmatrix}Edu+Fdv & Fdu+Gdv\\ Ldu+Mdv & Mdu+Ndv\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

因此在 $\cos\sigma\neq0$ 时，我们可从(2)式推得

$$\frac{1}{\rho}+\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}\cdot ds^2}\begin{vmatrix}Edu+Fdv & Fdu+Gdv\\ Ldu+Mdv & Mdu+Ndv\end{vmatrix}. \tag{5}$$

倘若 $\cos\sigma=0$，那只要从(1)的第二式出发进行类似的推导，仍然可以得出(5)式.

(5)式的右端在点(u,v)处仅由 $du:dv$ 所决定，我们用$\frac{1}{T}$表示，即

$$\frac{1}{T}=\frac{(EM-FL)du^2+(EN-GL)du\,dv+(FN-GM)dv^2}{\sqrt{EG-F^2}\,(Edu^2+2Fdudv+Gdv^2)}, \tag{6}$$

于是

$$\frac{1}{\rho}+\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{T}. \tag{7}$$

$\frac{1}{T}$称为属于方向 $du:dv$ 的**测地挠率**.

特别当 $\sigma=0$ 时，曲线在各点的主法线与同一点的曲面法线重合. 这种曲线称为**测地线**. 这时它的挠率$\frac{1}{\rho}$等于$\frac{1}{T}$.

从(6)式我们立刻知道，沿曲率线切线方向的测地挠率恒等于零，且其逆亦真.

在点(u,v)处的$\frac{1}{T}$是方向 $du:dv$ 的函数. 为了明确$\frac{1}{T}$与方向的具体对应关系，我们取曲率线为曲面的参数曲线，于是 $F=0$, $M=0$，而这时

$$\frac{1}{T}=\frac{(EN-GL)\,du dv}{\sqrt{EG}\,ds^2}=\left(\frac{N}{G}-\frac{L}{E}\right)\frac{\sqrt{E}\,du}{ds}\frac{\sqrt{G}\,dv}{ds}. \tag{8}$$

如果设 θ 为方向 $du:dv$ 与曲率线 $v=$常数的交角，那么(8)就可改写为

$$\frac{1}{T}=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\cos\theta\sin\theta, \tag{9}$$

这称为 Bertrand **公式**.

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$和$-\frac{\pi}{4}$时，由(9)我们知道，$\frac{1}{T}$取极值，而且它所对应的两个方向正好是两主方向的内外角平分线. 沿这两个方向进行的曲线称为**挠率线**，它们也是曲面在反演群作用下的不变曲线，但不如曲率线重要.

例 设$\frac{1}{R}$与$\frac{1}{T}$分别是属于同一条切线的法曲率和测地挠率. **证明:**

$$\frac{1}{T^2}+\frac{1}{R^2}-2H\frac{1}{R}+K=0. \tag{10}$$

(Vakselj, 1934)

解 从 Euler 定理,

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}=-\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\sin^2\theta,$$

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}=+\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\cos^2\theta.$$

于是根据 Bertrand 公式,我们得到

$$\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{1}{T^2}.$$

证毕.

特别需要注意的是,对于渐近曲线,$\frac{1}{R}=0$ 且 $\sigma=\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{1}{T}=\frac{1}{\rho}$,于是(10)式这时就化为

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{-K}, \tag{11}$$

这便是所谓的 Beltrami 定理[参考 § 19.3].

习 题

1. 设$\frac{1}{T}$的极大值和极小值分别为$\frac{1}{T_1}$和$\frac{1}{T_2}$, 则

$$\frac{1}{T_1}=-\frac{1}{T_2}=\sqrt{H^2-K}.$$

2. 若曲面上一条曲线为平面曲线且为测地线, 则它必为曲率线. 若曲面上一条曲线同时为测地线和曲率线,则它必为平面曲线.

3. 设曲面在一点 P 的切线与第一主方向相交于 θ 角, 并且这切线的共轭切线与同一主方向相交于 θ' 角. 证明:

$$\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}\theta'=-\frac{R_2}{R_1},$$

$$\operatorname{tg}(\theta'-\theta)=\frac{R_2\operatorname{ctg}\theta+R_1\operatorname{tg}\theta}{R_2-R_1}.$$

4. 改写

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 & \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} & \left(\frac{du}{ds}\right)^2\\ E & -F & G\\ L & -M & N\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 & -\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} & \left(\frac{dv}{ds}\right)^2\\ G & F & E\\ N & M & L\end{vmatrix},$$

并且利用行列式乘法直接证明：

$$\frac{1}{T^2}+\frac{1}{R^2}-2H\frac{1}{R}+K=0.$$

5. 设曲面的总曲率为正，则在每点必有唯一的一对共轭方向，使它们间的交角是所有共轭方向的交角中为最小. 这两个方向关于主方向必定是对称的，而且其逆亦真. 这时的共轭曲线称为**特征曲线**.

6. 凡是属于共轭方向的两个法曲率半径的乘积以特征曲线时为极大，而以曲率线时为极小.

7. 证明：特征曲线的微分方程式是

$$[L(GL-EN)-2M(FL-EM)]du^2+2[M(GL+EN)-2FLN]dudv$$
$$+[2M(GM-FN)-N(GL-EN)]dv^2=0.$$

8. 设 $J(\mathrm{I},\mathrm{II})$ 表示第一和第二基本形式的函数行列式，即

$$J(\mathrm{I},\mathrm{II})=\frac{\partial(\mathrm{I},\mathrm{II})}{\partial(du,dv)},$$

试证：1° $J(\mathrm{I},\mathrm{II})=0$ 为曲率线，2° $J[\mathrm{I},\ J(\mathrm{I},\mathrm{II})]$ 为挠率线，3° $J[\mathrm{II},\ J(\mathrm{I},\mathrm{II})]=0$ 为特征曲线.

9. 在五个形式 I, II, III $=J(\mathrm{I},\mathrm{II})$, IV $=J(\mathrm{I},\mathrm{III})$, 和 V $=J(\mathrm{II},\mathrm{III})$ 中逐次任取两个形式作它们的函数行列式，并令它们等于零，那么这些方程式决定的曲线必与以下五种曲线之一重合：极小曲线，渐近曲线，曲率线，挠率线和特征曲线.　　(小仓金之助，K. Ogura, 1916)

§18. 两曲面之间的保角对应

1. 保角对应

当两个曲面的点能建立一一对应时，如果一个曲面上任何两条曲线的交角总是等于第二个曲面上对应的两条曲线的交角，那么这个对应称为**保角对应**.

最简单的保角对应是 Ptolemy 的反演(大约公元 125—139年

左右). 对此继续进行讨论的有 Euler, Lambert, Lagrange 等人,其中尤其以 Lagrange(1779) 的地图制法研究为最著名. 完全解决这问题的是 Gauss(1825).

为了方便起见,我们用同一组参数值 (u,v) 来记两曲面 S,S' 的对应点. 下面我们来求 S 与 S' 的对应是保角的充要条件.

设两曲面 S,S' 的线素分别为

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

$$ds'^2=E'du^2+2F'dudv+G'dv^2.$$

当 (u,v) 先后变为 $(u+du,v+dv)$ 和 $(u+\delta u,v+\delta v)$ 时,根据假设,双方曲面上的两组对应方向的交角 α 与 α' 必定相等. 也就是说,如记 $\frac{dv}{du}=k,\frac{\delta v}{\delta u}=\kappa$,这时

$$\cos\alpha=\frac{E+F(k+\kappa)+Gk\kappa}{\sqrt{E+2Fk+Gk^2}\sqrt{E+2F\kappa+G\kappa^2}},$$

$$\cos\alpha'=\frac{E'+F'(k+\kappa)+G'k\kappa}{\sqrt{E'+2F'k+G'k^2}\sqrt{E'+2F'\kappa+G'\kappa^2}},$$

则对所有的 k 和 κ,必成立关系式 $\cos\alpha=\cos\alpha'$.

倘若固定 κ,然后决定 k 使 $E+F(k+\kappa)+Gk\kappa=0$,那么对这些 κ 与 k 必有 $E'+F'(k+\kappa)+G'k\kappa=0$ 成立. 由此可推得必要条件是

$$\frac{E}{E'}=\frac{F}{F'}=\frac{G}{G'}, \tag{1}$$

容易知道,这个条件也是充分的.

因此我们看到,能建立保角对应的两个曲面,它们的线素在对应点的比取定值,也就是

$$\frac{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}{E'du^2+2F'dudv+G'dv^2}=\frac{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}{E'\delta u^2+2F'\delta u\delta v+G'\delta v^2}.$$

从(1)我们可得到下列定理:

若两曲面之间能建立保角对应，则它们的极小曲线互相对应，而且其逆亦真.

这个结果不过是保角对应的另外一种定义方式而已. 如想完全解决这个问题，必须决定各个曲面的极小曲线的方程，然后才能得到所求的对应.

对于曲面 S，从

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \\
&= \left\{\sqrt{E}du+\left(\frac{F}{\sqrt{E}}+i\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\right)dv\right\} \\
&\cdot\left\{\sqrt{E}du+\left(\frac{F}{\sqrt{E}}-i\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\right)dv\right\}
\end{aligned} \tag{2}
$$

得知，极小曲线的微分方程取如下形式

$$
Adu+Bdv=0,
$$

式中 A, B 都是 u, v 的已知函数. 我们可用它的积分因子 $\mu=\mu(u,v)$ 乘它，使得

$$
\mu(Adu+Bdv)=d\varphi
$$

成为全微分. 于是

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \mu\left\{\sqrt{E}du+\frac{F+i\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}dv\right\}, \\
d\beta &= \nu\left\{\sqrt{E}du+\frac{F-i\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}dv\right\}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

这里的 μ 与 ν 是 u, v 的共轭复函数，所以

$$
\mu\nu=\frac{1}{\lambda^2}>0,
$$

因此，

$$
ds^2=\lambda^2 d\alpha d\beta. \tag{4}
$$

从(3)积分后可决定两个函数 α 与 β，如记作

$$
\alpha=\xi+i\eta, \quad \beta=\xi-i\eta, \tag{5}
$$

则曲面的线素可写成

$$ds^2=\lambda^2(d\xi^2+d\eta^2). \tag{6}$$

且容易验证，函数 ξ,η 关于 u,v 的 Jacobi 行列式非零，从而(ξ,η)可作为曲面上的新参数.

另一方面，如将 ξ,η 看成是平面上点的直角坐标，那么 $d\sigma^2=d\xi^2+d\eta^2$ 就应该是平面的线素. 因此，如果把曲面上参数值为(ξ,η)的点对应于平面上具有相同参数值的点，那么这个对应必定是保角对应.

如有第二个曲面 S'，我们可应用同样的方法，先把它的线素化为

$$ds^2=\lambda'^2 d\alpha' d\beta', \tag{7}$$

并且记

$$\alpha'=\xi'+i\eta', \quad \beta'=\xi'-i\eta', \tag{8}$$

则(ξ',η')可作为 S' 的新参数. 我们把 S' 上的点(ξ',η') 对应于平面上的点(ξ',η'). 由于

$$ds'^2=\lambda'^2(d\xi'^2+d\eta'^2), \tag{9}$$

所以这个对应也是保角的.

现在我们来研究两平面图形间一般的保角对应应该具有什么形式. 设(ξ,η)，(ξ',η') 为两平面上点的直角坐标. 要使对应$(\xi,\eta)\longrightarrow(\xi',\eta')$是共形对应，由条件(1)易知，这时如记

$$\xi'+i\eta'=f(\xi+i\eta) \tag{10}$$

或

$$\xi'-i\eta'=f(\xi+i\eta), \tag{11}$$

则 f 必为解析函数. 反之，对任何导数 $f'(\xi+i\eta)$非零的解析函数 f，由(10)或(11) 给出的对应必定是两平面间的保角对应. 因此，我们得到如下结果:

如果将已知两曲面的线素化为

$$\lambda^2(d\xi^2+d\eta^2), \quad \lambda'^2(d\xi'^2+d\eta'^2), \lambda^2>0, \lambda'^2>0$$

的形状，并且取任何解析函数 f，那么根据

$$\xi'+i\eta'=f(\xi+i\eta),$$

或

$$\xi'-i\eta'=f(\xi+i\eta),$$

可得到两曲面间的保角对应. 式中 $f'(\xi+i\eta)$ 的零点自然都应该除外.

2. 地图的制法

为了制作地图，Lagrange(1779) 把地球看作一个旋转曲面，然后向平面作保角对应. 我们把他的研究梗概叙述如下.

设旋转曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(p(u)\cos v, p(u)\sin v, q(u)), \tag{1}$$

我们可把 u 取作子午线的弧长，也就是成立

$$p'^2(u)+q'^2(u)=1 \tag{2}$$

[参阅 §13.3，习题 1]. 曲面的线素为

$$ds^2=du^2+p^2(u)dv^2. \tag{3}$$

为了确保这曲面能与 (x,y) 平面作保角对应，必须使条件

$$dx^2+dy^2=m^2(du^2+p^2dv^2) \tag{4}$$

成立，式中的 m 是 u,v 的函数. 然后，作代换

$$\int\frac{du}{p(u)}=\bar{u},$$

但仍用 u 表示 $\bar{u}$，并且记 $mp=n$，那么 u 与 v 两系参数曲线仍然是子午线和平行环，而条件(4)则化为比较简单的形式

$$dx^2+dy^2=n^2(du^2+dv^2).$$

由上段讨论可知，

$$x+iy=f(u+iv)$$

或

$$x-iy=f(u+iv) \tag{6'}$$

就表示旋转曲面到平面的保角对应，式中的 f 是解析函数.

为简单起见，我们就取定(6)作为所讨论的对应. 记 $f(u+iv)$ 关于复变数 $u+iv$ 的导函数为

$$f'(u+iv)=\alpha+i\beta, \tag{7}$$

则

$$dx+idy=(\alpha+i\beta)(du+idv), \tag{8}$$

于是就有

$$dx=\alpha du-\beta dv,\quad dy=\beta du+\alpha dv. \tag{9}$$

现在回忆一下平面曲线 $x=x(t), y=y(t)$ 的曲率半径的计算公式，即

$$r=\varepsilon\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dyd^2x-dxd^2y}, \tag{10}$$

式中的 $\varepsilon=\pm1$ 是为了保证 r 非负. 我们先把它用来计算平面上对应于子午线(即曲面上的曲线 $v=$常数) 的象曲线的曲率半径. 在(9)式中令 $dv=0$，并将所得的 dx, dy 代入(10)，我们就得到它的曲率

$$\frac{1}{r_1}=\varepsilon_1\frac{\beta\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}-\alpha\dfrac{\partial\beta}{\partial u}}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}},\qquad \varepsilon_1=\pm1. \tag{11}$$

同理，平面上对应于平行环的象曲线曲率为

$$\frac{1}{r_2}=\varepsilon_2\frac{\beta\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}-\alpha\dfrac{\partial\beta}{\partial v}}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}},\qquad \varepsilon_2=\pm1. \tag{12}$$

但是由(7)式知道，α 和 β 是解析函数 $f'(u+iv)$ 的实部和虚部，所以必定满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\beta}{\partial v},\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=-\frac{\partial\beta}{\partial u}, \tag{13}$$

于是我们可把(11)与(12)式改写为

$$\frac{1}{r_1}=\varepsilon_1\frac{\beta\frac{\partial\beta}{\partial v}+\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}=-\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\frac{1}{r_2}=-\varepsilon_2\frac{\beta\frac{\partial\beta}{\partial u}+\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}=\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{14}$$

假如我们用Ω来表示$[f'(u+iv)]^{-1}$的模，那么

$$\frac{1}{r_1}=-\varepsilon_1\frac{\partial\Omega}{\partial v},\qquad \frac{1}{r_2}=\varepsilon_2\frac{\partial\Omega}{\partial u}. \tag{15}$$

因此，倘若子午线的象全是圆的话，则r_1应当仅仅为v的函数，于是

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v}=0. \tag{16}$$

然而这也正好是r_2仅仅为u的函数的条件，所以我们就得到下面的定理：

将旋转曲面保角对应到平面时，如果所有子午线的象都是圆周，那么平行环的象也全是圆周，而且其逆亦真.

例如，我们把地球看作球面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin u).$$

这时，曲线$u=$常数是平行环，而曲线$v=$常数是子午线.

$$ds^2=du^2+\cos^2u\,dv^2=(du+i\cos u\,dv)(du-i\cos u\,dv),$$

$$d\alpha=\frac{du}{\cos u}+i\,dv,\qquad d\beta=\frac{du}{\cos u}-i\,dv,$$

积分后我们得到

$$\alpha=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+iv,$$

$$\beta=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-iv.$$

如果希望球面能与平面建立保角对应，那么双方的极小曲线必须相互对应，也就是 $\alpha=$常数和 $\beta=$常数对应于 $y+ix=$常数和 $y-ix=$常数.

实现这对应的方法有很多，其中最特殊的是

$$x=v, \qquad y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

这时，子午线与 y 轴的平行线相对应，平行环则与 x 轴的平行线相对应 .例如，将经度分为 360°，将纬度分为 180°，那么在平面上就所得到的是经度匀均而南北极附近极为简略的保角表示，这就是现代所用的地图. 它原来的名称叫海图，专门是给航海用的，由 Kremer(1569)所发现，但通称为 Mercator 地图.

3. Liouville 定理(1850)

假若空间的点对应是保角对应，则它必定是有限个反演和相似对应的乘积.

这是空间保角对应的基本定理，根据这定理我们知道空间的保角对应实质上与反演相差无异. 这事实也说明了空间与平面的保角对应的不同.

下面我们必须先证明两个引理. 第一个引理是关于三重直交曲面系的 Dupin 定理(1813). 假设在空间中已知三系单参数曲面族. 当任何两系中的各个曲面互相直交时，我们就称它们为**三重直交系统**.

Dupin定理 *在三重直交系统中，属于不同系的两个曲面的交线必定为双方的曲率线.*

证明. 设这三重直交系统的三系曲面分别由方程

$$f(x,y,z)=\text{常数}(=u),$$
$$g(x,y,z)=\text{常数}(=v), \tag{1}$$

$$h(x, y, z)=\text{常数}(=w)$$

所定义. 式中的 u, v, w 分别表示每系曲面的族参数. 由于在一定的 x, y, z 范围内, 三个函数的梯度 ∇f, $\nabla g, \nabla h$ 彼此直交而且都是非零向量, 所以 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \neq 0,$$

于是, 在一定范围内可由(1)解得三个数量函数

$$x=x(u, v, w), y=y(u, v, w), z=z(u, v, w), \tag{2}$$

或者我们把它们记为一个向量值函数

$$\boldsymbol{r}(u, v, w)=(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)). \tag{2'}$$

在(2′)中任意取定 u, v 或 w 的某一个值, 我们便得到三重直交系统中某一系里的一个曲面. 比如, 现在在第三系曲面 $w=$ 常数中任意选定一个曲面 $w=w_0$. 它的参数表示应当是

$$\boldsymbol{r}(u, v, w_0)=(x(u, v, w_0), y(u, v, w_0), z(u, v, w_0)). \tag{3}$$

这个曲面的两系参数曲线 u, v 是它自身与其它两系曲面 $u=$ 常数和 $v=$ 常数的交线, 所以这两系曲线构成直交系统. 换句话说, 对于任何 w_0,

$$\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v=0. \tag{4}$$

根据同样的理由, 对于任何 u_0

$$\boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_w=0, \tag{5}$$

而且对于任何 v_0

$$\boldsymbol{r}_w \cdot \boldsymbol{r}_u=0. \tag{6}$$

现在将(4), (5), (6)分别对 w, u, v 微分, 便有

$$\boldsymbol{r}_{uw} \cdot \boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_{vw} \cdot \boldsymbol{r}_u=0,$$

$$\boldsymbol{r}_{vu} \cdot \boldsymbol{r}_w+\boldsymbol{r}_{wu} \cdot \boldsymbol{r}_v=0,$$

$$\boldsymbol{r}_{wv} \cdot \boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{r}_w=0.$$

因此我们得到

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vw}=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{wu}=\boldsymbol{r}_w\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=0. \tag{7}$$

特别地，如果我们列出三个等式

$$\boldsymbol{r}_w\cdot\boldsymbol{r}_u=0,$$

$$\boldsymbol{r}_w\cdot\boldsymbol{r}_v=0,$$

$$\boldsymbol{r}_w\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=0$$

并注意到 $\boldsymbol{r}_w$ 不可能是零向量的话，那么只能有

$$(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uv})=0, \tag{8}$$

也就是说，$w=w_0$ 的曲面上直交的参数曲线网 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 又是共轭的，因此必定是曲率线. 对于其他两系曲面自然有同样的结果. 证毕.

接下来，我们必须证明第二个引理.

点点都是脐点的曲面必定为球面.

Demartres的证明 假设曲面 S 的任何点都为脐点，那么就成立下列等式

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N},$$

于是曲率线变成不定 [参照 § 15. 3]. 我们假定曲面 S 的方程取 Monge 形式 $\boldsymbol{r}(x, y)=(x, y, z(x, y))$. 根据 O. Rodriques 公式[§16. 1]，对于 S 上的任何方向 $d\boldsymbol{r}=(dx,dy,dz)$ 与 S 单位法方向对应的微分 $d\boldsymbol{n}$ 之间成立

$$d\boldsymbol{r}=-rd\boldsymbol{n}. \tag{9}$$

若记 $\boldsymbol{n}=(X,Y,Z)$，则可把(9)改写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy&=-\frac{1}{r}dx,\\ \frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy&=-\frac{1}{r}dy,\end{aligned} \tag{10}$$

由于这两式是对任何方向 $dx:dy$ 成立的，所以

$$\frac{\partial X}{\partial x}=-\frac{1}{r},\qquad \frac{\partial X}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y}=-\frac{1}{r}.$$

第一行两等式说明 r 只能是 x 的函数，而第二行的两等式则说明 r 至多只是 y 的函数，所以 r 必须是常数，于是(9)便改写为

$$d\boldsymbol{r}=-a d\boldsymbol{n}, \tag{11}$$

式中的 a 是常数. 积分后得到

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=-a\boldsymbol{n},$$

$\boldsymbol{r}_0$ 为常向量. 所以所讨论的曲面 S 是以 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心，$|a|$ 为半径的球面 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2=a^2$. 证毕.

基本定理的证明

先来证明球面在任何空间保角对应后仍旧为球面.

假设所讨论的空间保角对应为 T，而且 $\bar{S}$ 为球面 S 在 T 下的对应曲面，那么包括 S 在内的任何一个三重直交曲面系统 Σ 在对应 T 之下就变为包括 $\bar{S}$ 在内的一个三重直交曲面系统 $\bar{\Sigma}$.

现在我们选定球面 S 的任何一条直径 d，以 d 为轴作一个平面束，以它为第一系曲面；再以 S 的同心球面为第二系曲面；最后取以 S 的中心为顶点，以 d 为轴的一系正圆锥面为第三系曲面，那么它们全体就构成一个三重直交系统 Σ_d. 当 d 变动时，第二系曲面不变，而第一、三两系曲面则全部变更.

在保角对应 T 之下，$S\to\bar{S}$，$\Sigma_d\longrightarrow\bar{\Sigma}_d$，这里的 $\bar{\Sigma}_d$ 是包括曲面 $\bar{S}$ 在内的三重直交系统. 根据 Dupin 定理，$\bar{S}$ 与 $\bar{\Sigma}_d$ 中的其他两系曲面的交线应是 $\bar{S}$ 的曲率线，于是对于所得的 $\bar{\Sigma}_d$，$\bar{S}$ 在任何一点 $\bar{P}$ 就定出两个主方向. 如果变更 d，这时 $\bar{S}$ 仍旧不变，从而在同一点 $\bar{P}$ 又可得到另外两个主方向，因此 $\bar{S}$ 在 $\bar{P}$ 的主方向为无定，所以 $\bar{P}$ 为脐点. 又因为 $\bar{P}$ 是 $\bar{S}$ 的任何点，根据第二个引理得知，$\bar{S}$ 仍为球面.

我们不难证明 T 是一些反演的乘积. 设 $A,\bar{A}$ 为 T 的一对对

应点，I_A 和 $I_{\bar{A}}$ 分别表示中心为 A 和 $\bar{A}$ 的两个反演，这时在变换

$$I_{\bar{A}}TI_A = M$$

之下，点与点、平面与平面、球面与球面互相对应．所以 M 必定是一个相似变换，也就是平移、旋转、反射和放大等变换的乘积．这是由于根据射影几何学的基本定理，凡是点与点对应，平面与平面对应的连续变换必定为射影变换．而对所讨论的 M，它又把球面对应于球面，从而球面所必须经过的无限远虚圆在 M 之下必定是不动的，因此 M 至少是一个仿射变换

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t, \\ t' &= t, \end{aligned}$$

式中 $t=0$ 表示无限远平面．然而当 $t=0$ 时应该成立

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = k^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i^2 = \sum_{i=1}^{3} c_i^2 = k^2,$$

$$\sum_{i=1}^{3} b_i c_i = \sum_{i=1}^{3} c_i a_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = 0,$$

于是我们知道 M 是一个相似变换．

由于 $I_A^2 = I_{\bar{A}}^2 = 1$，即恒等变换，所以从(12)式我们容易得到

$$T = I_{\bar{A}} M I_A.$$

由此看出，空间中任何一个保角对应 T 必定为有限个反演和相似的乘积，这就是我们要想证明的基本定理．证毕．

习　题

1. 设于两曲面之间可建立保角对应，则在各对对应点每个曲面必有两对方向，使得各个方向和对应方向的法截线在对应点的曲率半径 R,R' 满足

$$\frac{1}{R}=\pm\frac{1}{R'}.$$

为了使得两对方向互为调和间隔的充要条件是：两曲面在对应点的总曲率 K,K' 相等.

(Stäckel, 1896).

2. 如果在上题中用测地挠率 $\frac{1}{T}$，$\frac{1}{T'}$ 代换 $\frac{1}{R}$，$\frac{1}{R'}$，那么类似的结论仍成立，但对所述的充要条件须改为

$$H^2-K=H'^2-K'.$$

(Ogura, 1916)

3. 设 ω 为曲面在一点的任何切线 t 与其共轭切线间的交角，而 ω_1 为 t 与 t 关于挠率线的共轭切线之间的交角. 证明 $\omega-\omega_1$ 是反演不变量.

(苏步青，1927)

4. 取变量为 $u+iv$ 的三个解析函数 $x_1+ix_2, y_1+iy_2, z_1+iz_2$，由此作两个曲面

$$\boldsymbol{r}_1=(x_1(u,v),y_1(u,v),z_1(u,v));$$

$$\boldsymbol{r}_2=(x_2(u,v),y_2(u,v),z_2(u,v)),$$

并规定同一对参数值 (u,v) 所对应的两点为两曲面间的对应点. 证明这两曲面在对应点的法线平行，总曲率相等，而且都为负值.

5. 设函数 $f(u,v)$ 满足

$$1+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)^2\neq 0,$$

而且平面上的点 (x,y) 与点 (x^*,y^*) 依照如下定义互相对应：

$$x=u+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v},\quad y=v-\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},$$

$$x^*=u-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v},\quad y^*=v+\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}.$$

证明：互相对应的两个区域的面积始终相等.

(G. Scheffers, 1918)

6. 设 n 个动点 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n$ 有确定的重心，而且它们各自所画出的

曲面在对应点有平行的切平面. 用 R_r, R'_r 表示曲面 (P_r) 在对应点 P_r 的两个主曲率半径，并用 ω_r 表示平行于确定平面的切平面上 (P_r) 的一个主方向与一个方向之间的交角. 证明:

$$\sum_{r=1}^{n}(R_r+R'_r)=0,$$

$$\sum_{r=1}^{n}(R_r-R'_r)\cos 2\omega_r=0,\quad \sum_{r=1}^{n}(R_r-R'_r)\sin 2\omega_r=0.$$

7. 设 $\boldsymbol{r}=(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))$ 表示一个三重直交曲面系统，而且用 $E_u,F_u,G_u;L_u,M_u,N_u$ 分别表示曲面 $u=$ 常数的第一、二基本量，对另外两系曲面亦用类似记法. 另外，记

$$H_1=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\ H_2=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v,\ H_3=\boldsymbol{r}_w\cdot\boldsymbol{r}_w.$$

证明:

$$E_u=H_2^2,\ F_u=0,\ G_u=H_3^2;$$
$$E_v=H_3^2,\ F_v=0,\ G_v=H_1^2,$$
$$E_w=H_1^2,\ F_w=0,\ G_w=H_2^2;$$
$$L_u=-\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u},\ M_u=0,\ N_u=-\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u};$$
$$L_v=-\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v},\ M_v=0,\ N_v=-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v};$$
$$L_w=-\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w},\ M_w=0,\ N_w=-\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}.$$

8. 从 Dupin 定理导出 Lie 定理.

[已知曲面 S 时，作出 S 的一系平行曲面，以及沿两族曲率线的两系法线可展曲面，就得到包括 S 在内的一个三重直交系统.]

9. 证明由方程

$$\boldsymbol{r}(u,v,w)=(a+w\cos u\cos v,\ w\cos u\sin v,\ w\sin u)$$

所定义的同心球 $w=$ 常数，平面束 $v=$ 常数，和锥面 $u=$ 常数构成一个三重直交曲面系统，而且它经过反演

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

之后变为

$$\boldsymbol{r}_1(u,v,w)=\left(\frac{a+w\cos u\cos v}{a^2+2aw\cos u\cos v+w^2},\ \frac{w\cos u\sin v}{a^2+2aw\cos u\cos v+w^2},\right.$$

$$\left.\frac{w\sin u}{a^2+2aw\cos u\cos v+w^2}\right).$$

当 u=常数时，所定义的曲面是 Dupin(1822)的**圆曲面**.

10. 证明：(1) Dupin 圆曲面的两系曲率线都是圆. (2) Dupin 圆曲面可以是两个不同的球面系统的包络面，且各球沿曲率线与曲面相切.

11. 证明：直纹面沿它母线的法线画成双曲抛物面.

12. 设一平面 π 在移动时始终与两曲面 S_1 和 S_2 相切. 假定 $a)$ π 与两曲面的切点间距离一定；$b)$ π 与 S_1 的切点轨迹是 S_1 的曲率线；$c)$ π 与 S_2 的切点轨迹是 S_2 的曲率线，则由三个假定中的任何两个可证得第三个假定.

(Beltrami, 1864).

§ 19. Gauss 的球面表示

1. 第三基本形式 Weingarten 公式

在曲面的各点作它的单位法向量，然后把这向量平移到坐标原点，那么它的端点就决定了单位球面上的一点. 我们把如此建立的曲面上点与单位球面上点的对应称为 **Gauss 的球面表示**，或者 Gauss **映照**.

设 u, v 为曲面的两参数，根据上述定义，曲面上的点 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 与单位球面上的点 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 互相对应. 这里的 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 表示曲面在 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 处的单位法向量.

球面表示的线素为

$$d\sigma^2 = d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{n} = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \tag{1}$$

式中

$$e = \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,\quad f = \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,\quad g = \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v. \tag{2}$$

(1) 称为曲面的**第三基本形式**，e, f, g 称为**第三基本量**. 下面我们将用曲面的第一、第二基本量 $E, F, G; L, M, N$ 来表达第三基本量.

由于在曲面上的每一点，$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 和 $\boldsymbol{n}$ 是三个线性独立的向量，

所以向量 $\boldsymbol{n}_u$ 应有如下的分解式

$$\boldsymbol{n}_u = a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v + c\boldsymbol{n}. \tag{3}$$

但是,注意到

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=0,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0,$$
$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=-L,\ \boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=-M,$$

所以成立

$$c=0,\ aE+bF=-L,\ aF+bG=-M.$$

因此解得

$$a=\frac{FM-GL}{EG-F^2},\quad b=\frac{FL-EM}{EG-F^2}.$$

这样,我们得到

$$\boldsymbol{n}_u=\frac{FM-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v. \tag{4}$$

同理可得

$$\boldsymbol{n}_v=\frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v. \tag{5}$$

(4)和(5)称为 Weingarten 公式(1861).

我们根据这公式容易求出 e,f,g,这就是

$$e=\frac{1}{EG-F^2}(L^2G-2LMF+M^2E),$$
$$f=\frac{1}{EG-F^2}(LMG+MNE-M^2F-NLF), \tag{6}$$
$$g=\frac{1}{EG-F^2}(N^2E-2MNF+M^2G),$$

或者把它们改写为

$$e=2HL-KE,$$
$$f=2HM-KF, \tag{7}$$
$$g=2HN-KG.$$

由此可导出三个基本形式之间的关系

$$d\sigma^2 = 2H(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) - K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2). \tag{8}$$

假如用 I, II, III 来表示第一，第二，第三基本形式，那么我们就可改写(8)为

$$K\,\mathrm{I} - 2H\,\mathrm{II} + \mathrm{III} = 0. \tag{8'}$$

例 证明$\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}$，这里的$\frac{1}{R}$和$\frac{1}{T}$分别是属于方向$du:dv$的法曲率和测地曲率.

解 依照(8')，

$$\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}} = 2H\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} - K = 2H\frac{1}{R} - K$$

$$= \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} \qquad [\text{参考 § 17, (10)}].$$

2. Gauss 定理

设K是曲面在其一点P处的总曲率. 在曲面上于P的近旁作封闭曲线C，C在球面表示下的对应曲线是$\overline{C}$. 当C收缩成P点时，C和$\overline{C}$所包围的表面积ΔO和$\Delta\omega$的比有极限值

$$\lim\frac{\Delta\omega}{\Delta O} = \frac{1}{|K|}. \tag{1}$$

证明 因为$dO = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$，$d\omega = \sqrt{eg - f^2}\,du\,dv$，所以

$$\left(\frac{dO}{d\omega}\right)^2 = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}. \tag{2}$$

但是，根据上一段中的公式(7)

$$eg - f^2 = (2HL - KE)(2HN - KG) - (2HM - KF)^2,$$

也就是

$$eg - f^2$$

$$= (2H)^2(EG - F^2)K - 2HK(EG - F^2)2H + (EG - F^2)K^2$$

$$=(EG-F^2)K^2,$$

所以我们得到

$$\left(\frac{dO}{d\omega}\right)^2=\frac{1}{K^2}.$$ 证毕.

3. Beltrami-Enneper 定理

设曲面在点P处的总曲率 $K<0$,则过P点的两条渐近曲线在P的挠率等于$\pm\sqrt{-K}$.

证明. 对于渐近曲线的方向,II$=0$,于是我们从第1段的(8′)得到

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=-K.$$

然而渐近曲线的密切平面与曲面的切平面重合,所以渐近曲线的从法向量$\boldsymbol{B}=\pm\boldsymbol{n}$,于是再利用 Frenet 公式,我们便可导出渐近曲线的挠率$\frac{1}{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=-K.$$ 证毕.

习 题

1. 证明 Casorati 曲率$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)$等于

$$\frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}.$$

2. 若一个曲面与它的球面表示成保角对应,则这曲面必为球面或极小曲面($H=0$).

3. 设曲面在其一点P的近旁满足$K<0$,把两族渐近曲线取为参数曲线网. 用两条邻近的渐近曲线$u,u+\Delta u$以及两条邻近的渐近曲线v, $v+\Delta v$作曲面上的微小空间四边形

$$P(u,v),P_1(u+\Delta u,v),P_2(u,v+\Delta v),P_3(u+\Delta u,v+\Delta v).$$

设它的体积为 T，并以 PP_1, PP_2 为两边作平行四边形，设它的面积为 Ω. 证明：当 $\Delta u\to 0, \Delta v\to 0$ 时

$$\lim\frac{T}{\Omega^2}=\frac{1}{6}\sqrt{-K}.$$

(Voss, 1891)

4. 以曲面上的一点 P 为中心作小球面，使它与曲面相交于一条封闭曲线，设它的周长为 p，并且设对应于它的球面表示的周长为 p'. 当小球半径趋于零时，问极限值 $\lim p'/p$ 是否等于平均曲率 H?

(R. Sturm, 1883; Stäckel, 1918)

§ 20. Beltrami 的微分参数

1. 代数学的一个定理

对于 n 个变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次形式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \quad (a_{ik}=a_{ki}), \tag{1}$$

我们写出它的系数阵的行列式

$$|a_{ik}|\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}. \tag{2}$$

当有变换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\bar{x}_k \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

将变数 x 变为 $\bar{x}$ 时，原来的二次形式(1)仍化为二次形式，

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k\equiv\sum_{i,k=1}^{n}\bar{a}_{ik}\bar{x}_i\bar{x}_k. \tag{4}$$

我们假定变换(3)的行列式

$$|\alpha_{ik}|\equiv\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

于是由(4)容易知道新旧二次形式系数阵的行列式之间存在下列关系:

$$|\bar{a}_{ik}| = |\alpha_{ik}|^2 \cdot |a_{ik}|. \tag{5}$$

换句话说,一个二次形式系数阵的行列式是权2的**不变量**.

设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一组反步变数,也就是当变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 经受变换(3)时,$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 应受的变换为

$$\bar{u}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} u_k \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{6}$$

这时,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i \bar{x}_i \tag{7}$$

便是一个**共变式**,也就是说它在变换(3)和(6)下面是不变的.

现在取任何两组反步变数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 及 $v_1, v_2, \cdots, v_n$, 我们容易证明

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{u}_1 \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{u}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} & \bar{u}_n \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |\alpha_{ik}|^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

从(5)与(8)我们得知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

是一个绝对共变式.

2. Beltrami 的第一阶微分参数

假定已知 n 个变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个二次微分形式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i dx_k, \tag{1}$$

其中 $a_{ik}=a_{ki}$，并且它们都为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数. 现在我们来研究变数的一般变换

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \tag{2}$$

所造成的结果，这里我们假定函数行列式

$$J=\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)} \neq 0. \tag{3}$$

这时各变数的微分 $dx_i (i=1,2,\cdots,n)$ 应经受一次变换

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

它的系数行列式恰恰是 J. 这时，形式(1)化为

$$\sum_{i,k=1}^{n} \bar{a}_{ik}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) d\bar{x}_i d\bar{x}_k, \tag{5}$$

式中已令 $\bar{a}_{ik}=\bar{a}_{ki}$.

其次，设 φ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任何函数，当 x 变换为 $\bar{x}$ 时

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n).$$

于是我们有

$$d\varphi=d\bar{\varphi},$$

也就是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}dx_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}_k}d\bar{x}_k. \tag{6}$$

所以 n 个函数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$

所受的变换与(4)互为反步。

因此，根据上段的结果，我们得到一个**绝对共变式**

$$\nabla(\varphi,\psi)\equiv-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}$$

$$:\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

这也就是 Beltrami 的第一阶微分参数.

例如，$n=2, x_1=u, x_2=v$，并且取曲面的线素

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

作为基本二次微分形式. 这时，第一阶微分参数是

$$\nabla(\varphi, \psi)=\frac{G\varphi_u\psi_u-F(\varphi_u\psi_v+\varphi_v\psi_u)+E\varphi_v\psi_v}{EG-F^2}, \tag{8}$$

(Beltrami 原来的记号是 $\Delta_1(\varphi, \psi)$). 我们定义

$$\nabla\varphi=\nabla(\varphi, \varphi),$$

也就是

$$\nabla\varphi=\frac{G\varphi_u^2-2F\varphi_u\varphi_v+E\varphi_v^2}{EG-F^2}, \tag{9}$$

(Beltrami 原来的记号是 $\Delta_1\varphi$).

3. Beltrami 的第二阶微分参数

下面我们用 A_{ik} 表示行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

中元素 a_{ik} 的代数余子式,则对任何函数 φ,

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_{s=1}^{n}A_{rs}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\right\} \tag{2}$$

是一个绝对共变式，我们称它为**第二阶微分参数**(Beltrami 则用 $\Delta_2\varphi$ 表示).

当 $n=2$ 时,如果我们记 $x_1=u, x_2=v$,并取曲面 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 的第一基本形式作为定义微分参数的基本二次形式,于是就有

$$\Delta\varphi\equiv\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\varphi_v-F\varphi_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]. \tag{3}$$

在一般情况下 $\Delta\varphi$ 是共变式. 证明见后(§25.5). 我们仅仅就(3)的情形讨论于下.

定理　设 C 为曲面上的一条简单封闭曲线, S 表示它所包围的曲面区域, dO 是曲面的面积元素，而且 n 是与 C 的切线方向垂

直的曲面的切线方向，并要求：C 的切线正向 $du:dv$ 与法线正向 n 所决定的切平面的定向，同该点 u 曲线正向与 v 曲线正向所决定的切平面的定向一致，那么

$$\iint_S \nabla(\varphi,\psi)\,dO = -\oint_C \psi\frac{d\varphi}{dn}ds - \iint_S \psi\Delta\varphi\,dO, \tag{4}$$

如果我们能证明(4)式成立，那么对 $\Delta\varphi$ 的共变性也就立即明了．这是由于，(4)的两侧除了 $\Delta\varphi$ 所在的一项以外，都是曲面的共变式.

证明 如果我们记

$$A=\frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}},\quad B=\frac{E\varphi_v-F\varphi_u}{\sqrt{EG-F^2}}, \tag{5}$$

则

$$\nabla(\varphi,\psi)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(A\psi_u+B\psi_v),$$

于是

$$\iint_S \nabla(\varphi,\ \psi)\,dO=\iint_D (A\psi_u+B\psi_v)\,dudv, \tag{6}$$

式中 D 表示 S 所对应的参数 (u,v) 的区域．然而

$$\iint_D (A\psi_u+B\psi_v)\,dudv$$

$$=\iint_D\left\{\frac{\partial(A\psi)}{\partial u}+\frac{\partial(B\psi)}{\partial v}\right\}dudv-\iint_D \psi\left(\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\right)dudv,$$

而且

$$\iint_D \psi\left(\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial B}{\partial v}\right)dudv=\iint_S \psi\Delta\varphi\,dO,$$

所以我们得到

$$\iint_S \nabla(\varphi, \psi) dO$$

$$= -\iint_S \psi \Delta\varphi dO + \iint_D \left\{\frac{\partial(A\psi)}{\partial u} + \frac{\partial(B\psi)}{\partial v}\right\} du dv. \tag{7}$$

根据 Green 定理，(7) 式右端第二项积分又可写为

$$\iint_D \left\{\frac{\partial(A\psi)}{\partial u} + \frac{\partial(B\psi)}{\partial v}\right\} du dv$$

$$= \oint_C \psi \left(A\frac{dv}{ds} - B\frac{du}{ds}\right) ds. \tag{8}$$

因此，我们只要计算

$$B\frac{du}{ds} - A\frac{dv}{ds} \tag{9}$$

就可以了.

设切线方向 n 决定于 $\delta u:\delta v$，并记 δn^2 为 δ 方向的线素. 由于 $\delta u:\delta v$ 与 $du:dv$ 垂直，根据 §13.1 公式(5)我们便有

$$E\delta u du + F(\delta v du + \delta u dv) + G\delta v dv = 0,$$

也就是

$$\delta u:\delta v = -(Fdu + Gdv):(Edu + Fdv),$$

改写后

$$\delta u = -\lambda(Fdu + Gdv), \quad \delta v = \lambda(Edu + Fdv), \tag{10}$$

这里的 λ 是待定的比例因子. 我们在线素

$$\delta n^2 = E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2$$

中把(10)式中的 $\delta u, \delta v$ 代入可以得到

$$\delta n^2 = \lambda^2(EG - F^2) ds^2. \tag{11}$$

根据 C 的切线正向与法线正向的规定，

$$\begin{vmatrix} du & dv \\ \delta u & \delta v \end{vmatrix} > 0.$$

如把(10)式代入，这条件又可写成

$$\lambda ds^2>0,$$

所以 $\lambda>0$. 因此由(11)式可能得

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\delta n}{ds}. \tag{12}$$

把所得的 λ 代回到(10)式，这时

$$\delta u=-\frac{F\frac{du}{ds}+G\frac{dv}{ds}}{\sqrt{EG-F^2}}\delta n,$$

$$\delta v=\frac{E\frac{du}{ds}+F\frac{dv}{ds}}{\sqrt{EG-F^2}}\delta n. \tag{13}$$

于是我们最后得到

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dn}&=\varphi_u\frac{\delta u}{\delta n}+\varphi_v\frac{\delta v}{\delta n}\\&=\frac{E\varphi_v-F\varphi_u}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{du}{ds}-\frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{dv}{ds}\\&=B\frac{du}{ds}-A\frac{dv}{ds},\end{aligned} \tag{14}$$

也就是要想求的(9)式. 由(7),(8),(14)式容易得到(4)式.

证毕.

我们看到(4)的左端关于两函数 φ,ψ 是对称的，所以如果在(4)的两端减去类似的等式

$$\iint_S\nabla(\psi,\ \varphi)dO=-\oint_C\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds-\iint_S\varphi\Delta\psi dO, \tag{4'}$$

那么便可得到

$$\iint_S(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)dO=\oint_C\left(\psi\frac{d\varphi}{dn}-\varphi\frac{d\psi}{dn}\right)ds. \tag{15}$$

这公式就是 Green 定理在曲面上的推广.

习　题

1. 设 $\varphi(u,v)$ 是曲面上点的函数. 当方向 ds 在一点周围旋转时，证明 $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$ 的极大值等于 $\nabla\varphi$.　(F. Engel).

2. 证明 $\nabla(\varphi+\mu\psi)=\nabla\varphi+2\mu\nabla(\varphi,\psi)+\mu^2\nabla\psi$，这里的 μ 为常数.

3. 设曲面上 $\varphi(u,v)=$ 常数定义一系曲线，并设它们的直交曲线的弧长为 $\bar{s}$. 证明：沿直交曲线所作的函数 $\left(\frac{d\varphi}{d\bar{s}}\right)^2$ 等于 $\nabla\varphi$.

4. 证明：曲面上两曲线 $\varphi(u,v)=$ 常数，$\psi(u,v)=$ 常数相交于一点时，它们交角的余切等于

$$\frac{\nabla(\varphi,\psi)}{\sqrt{\nabla\varphi\nabla\psi-\nabla^2(\varphi,\psi)}}.$$

5. 设 φ 是曲面上点的函数，s_1 和 s_2 是曲面上在一点直交的两曲线的弧长，而且 g_1，g_2 为它们在交点处的测地曲率，则成立

$$\Delta\varphi=\frac{d^2\varphi}{ds_1^2}+\frac{d^2\varphi}{ds_2^2}+g_1\frac{d\varphi}{ds_1}+g_2\frac{d\varphi}{ds_2}.\qquad\text{(Cesàro, 1896)}$$

(关于测地曲率的定义参照 §21.2.)

6. 设 P 为曲面的正常点，C 为曲面上的微小环路曲线，它把 P 包围在所围成的区域内. 记 θ 为 C 在一点的正法线与曲面在 P 的切平面之间的交角，且 s 为 C 的弧长. 证明：当曲线收缩成 P 点时，

$$\lim\frac{\oint\theta ds}{\iint dO}=2H.\qquad\text{(Calonghi, 1930)}$$

证明　C 在点 (u,v) 的正法线方向是

$$\frac{\delta r'}{\delta n}=\frac{\partial r'}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta n}+\frac{\partial r'}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta n},$$

式中的 $r'=r+r_u u+r_v v+\cdots$，未写出的量都是二阶和二阶以上的小量，以下也采用这个约定.

然而从(13)我们得到

$$\oint\theta ds=\oint\sin\theta ds+\cdots$$

$$=\oint\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\Big\{(Fdu+Gdv)(Lu+Mv)$$

$$-(Edu+Fdv)(Mu+Nv)\}+\cdots$$

$$=\oint Pdu+Qdv+\cdots=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}\right)dudv+\cdots,$$

式中

$$\frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{GL-FM}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{\partial P}{\partial v}=\frac{FM-EN}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

所以

$$\oint\theta ds=2H\iint\sqrt{EG-F^2}dudv+\cdots=2H\iint dO+\cdots.$$ 证毕.

7. 设曲面 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的单位法向量是 $\boldsymbol{n}=(X,Y,Z)$. 证明:

$$\nabla x=1-X^2,\nabla y=1-Y^2,\nabla z=1-Z^2,$$

$$\nabla(x,y)=-XY,\nabla(y,z)=-YZ,\nabla(z,x)=-ZX,$$

$$\nabla X+\nabla Y+\nabla Z=\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2},$$

$$\Delta x=2HX,\Delta y=2HY,\Delta z=2HZ.$$

8. 设 $\rho=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, $W=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=xX+yY+zZ$, 则成立

$$\nabla\rho=2\rho-W^2,\quad \Delta\rho=2(1+HW).$$

9. 设 $\overline{\Delta}$ 表示关于 $edu^2+2fdudv+gdv^2$ 所作的 Beltrami 第二阶微分参数, 证明:

$$R_1+R_2=-\overline{\Delta}W-2W,$$

式中, $W=xX+yY+zZ$.

§21. 测　地　线

1. 测地线的定义

在平面上已知两点 $P(x_0,y_0)$ 和 $Q(x_1,y_1)$ 时, 如果我们用方程为

$$y=y(x) \tag{1}$$

的曲线 C 连结这两点, 则 P,Q 间的弧长就是

$$s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{2}$$

如果我们希望求一曲线 C，使得 s 能取极大或极小值，那就必须应用变分学的一个定理，对此我们简述如下.

设函数 $\mathscr{F}(x,y,y')$ 为已知．对于已知的 x_0 和 x_1，要求出函数 $y=y(x)$ 使得积分

$$\int_{x_0}^{x_1}\mathscr{F}(x,y,y')\,dx$$

能取极大或极小值，也就是使

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\mathscr{F}(x,y,y')\,dx=0. \tag{3}$$

这个变分学问题的解 $y=y(x)$ 必须满足一个微分方程，即 Euler **方程**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial y'}\right)-\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial y}=0. \tag{4}$$

自然，凡满足(4)的函数 $y=y(x)$ 未必能使原积分取到极大或极小值．由(4)的解决定的曲线

$$y=y(x)$$

则称为**极值线**.

如果把上述的一般结果应用到所讨论问题的积分(2)，那么由于 $\mathscr{F}(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$，(4)应当是

$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial y'}=\text{常数},$$

也就是

$$y'=\text{常数}.$$

所以极值线是**直线**

$$y=ax+b.$$

现在我们应用这一般的结果到曲面上，从而把直线的概念拓广到曲面．设

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{5}$$

是曲面的线素，$v=v(u)$表示曲面上两定点(u_0, v_0)和(u_1, v_1)之间的曲线，于是它们间的曲线弧长就等于

$$s=\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du, \tag{6}$$

式中的$v'=\dfrac{dv}{du}$.

变分问题

$$\delta s=0$$

的极值线必须满足 Euler 方程(4). 这时由于

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}(u, v, v')\\&=\sqrt{E(u, v)+2F(u, v)v'+G(u, v)v'^2},\end{aligned}$$

所以要求的微分方程便是

$$\frac{d}{du}\frac{F+Gv'}{\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}}-\frac{E_v+2F_vv'+G_vv'^2}{2\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}}=0. \tag{7}$$

曲面上凡是满足(7)的曲线$v=v(u)$称为曲面的**测地线**. 自然，它是平面上的直线在曲面上的推广.

(7)的计算结果如下，

$$v''=Pv'^3+Qv'^2+Rv'+S, \tag{7'}$$

其中

$$P=\frac{-FG_v-GG_u+2GF_v}{2(EG-F^2)}, \tag{8$_1$}$$

$$Q=\frac{GE_v-FG_u}{EG-F^2}-\frac{EG_v+FG_u-2FF_v}{2(EG-F^2)}, \tag{8$_2$}$$

$$R=-\frac{EG_u-FE_v}{EG-F^2}+\frac{GE_u+FE_v-2FF_u}{2(EG-F^2)}, \tag{8$_3$}$$

$$S=\frac{FE_u+EE_v-2EF_u}{2(EG-F^2)}. \tag{8$_4$}$$

在曲面的任何一点引任何一条切线，则经过这点必定可以唯一地决定一条测地线，使它在这点切于所作的切线. 实际上，对于

初始条件 $v(u_0)=v_0, v'(u_0)=v'_0$，二阶常微分方程(7')在一般情形下总存在唯一解 $v=v(u)$. 由此我们看到，在普通的曲面上一般存在依赖于两参数的测地族.

倘若我们把一系测地线取为参数曲线 $v=$常数，则

$$2EF_u-FE_u-EE_v=0. \tag{9}$$

倘若我们把一系测地线取为参数曲线 $u=$常数，则

$$2GF_v-FG_v-GG_u=0. \tag{10}$$

2. 测地曲率

设 Γ 为曲面上的一条曲线，O 是 Γ 上的任何一点. 在 O 点作曲面的切平面 π，并作 Γ 在 π 上的正射影 Γ'. 根据 Gauss 的做法，我们把平面曲线 Γ' 在 O 点的曲率称为曲线 Γ 在 O 的**切面曲率或测地曲率**，记作 $\frac{1}{r_g}$.

设 $\overrightarrow{OT}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 为 Γ' 在 O 点处的切向量和法向量，$\overrightarrow{OB}$ 为 Γ 在点 O 的主法向量，$\overrightarrow{OA}$ 则为曲面在 O 点的法向量，并记 $\angle AOB=\theta$ (见图 17). 当我们作 Γ 的正射影 Γ' 时，所得到的柱面的母线就是 Γ 和 Γ' 上两个对应点之间的连线.

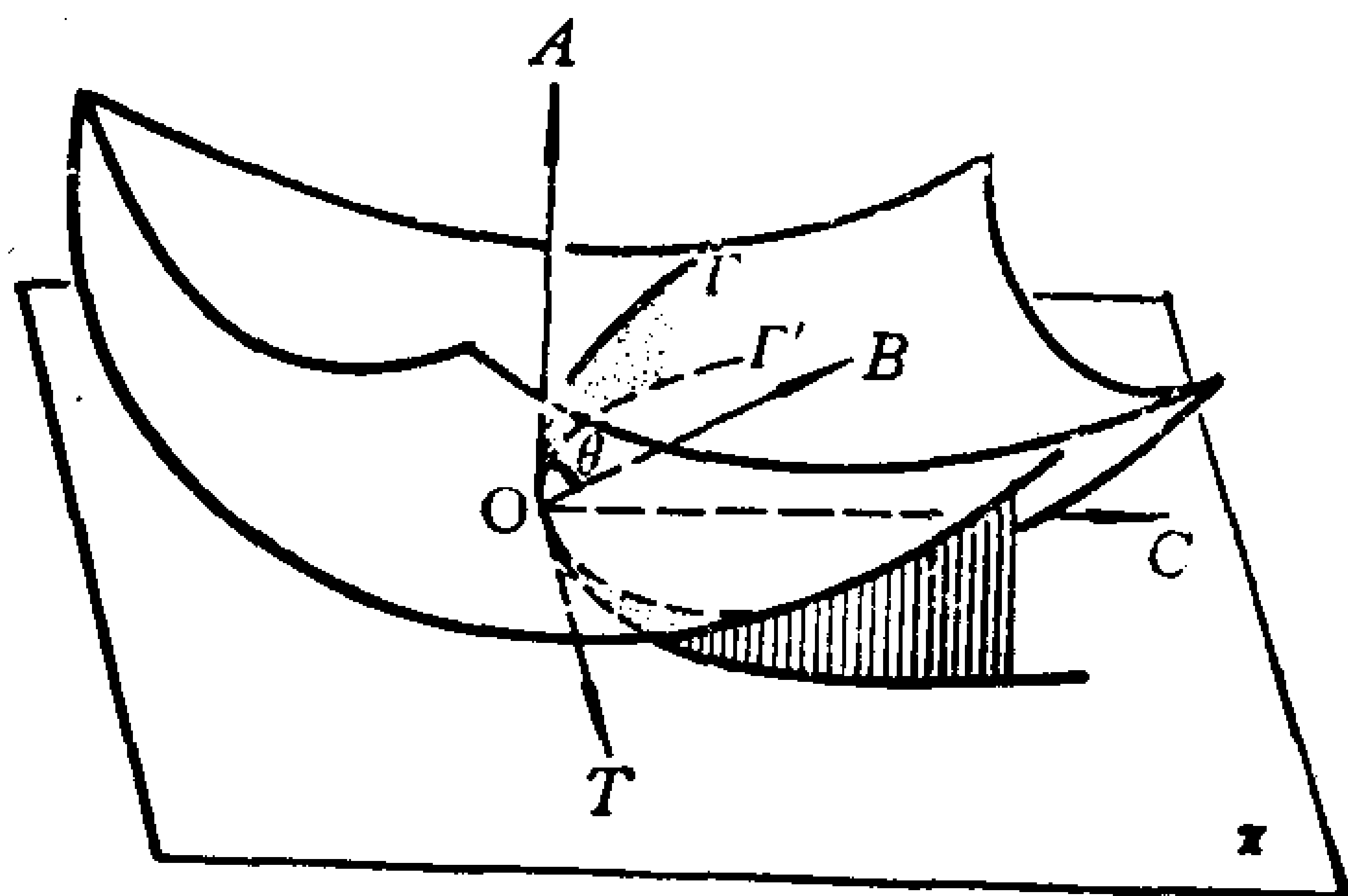


图 17

现在我们应用 Meusnier 定理（§15.2）到这个柱面. 因为 $\overrightarrow{OT}$ 是它的切向量，$\overrightarrow{OC}$ 则是柱面的法向量，而且Γ是这柱面在 O 与 OT 相切的曲线，所以Γ和Γ'在O点处的曲率$\frac{1}{r}$和$\frac{1}{r_g}$便满足关系式.

$$r=r_g\cos\angle BOC.$$

由于$\angle BOC=\frac{\pi}{2}-\theta$，所以曲线$\Gamma$在点$O$的测地曲率等于

$$\frac{1}{r_g}=\frac{\sin\theta}{r}. \tag{1}$$

设Γ的从法向量为$\boldsymbol{B}$，改记曲面法向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{n}$，则

$$\sin\theta=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n},$$

而且

$$\boldsymbol{B}=r(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''),$$

式中的$\boldsymbol{r}$是Γ的向量表示，而且所有的求导都是对Γ的弧长s进行的. 于是我们得到

$$\frac{1}{r_g}=(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{n}). \tag{2}$$

可是根据行列式的乘法定理，

$$(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}' & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}'' & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}' & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}'' & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}' & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'' & \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}\end{vmatrix},$$

注意到

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1,\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}=0,\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_u(\boldsymbol{r}_u u'+\boldsymbol{r}_v v')=Eu'+Fv',$$

$$\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_v(\boldsymbol{r}_u u'+\boldsymbol{r}_v v')=Fu'+Gv',$$

$$\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}_u(\boldsymbol{r}_{uu}u'^2+2\boldsymbol{r}_{uv}u'v'+\boldsymbol{r}_{vv}v'^2+\boldsymbol{r}_u u''+\boldsymbol{r}_v v'')$$

$$=\frac{1}{2}E_u u'^2+E_v u'v'+\left(F_v-\frac{1}{2}G_u\right)v'^2+Eu''+Fv'',$$

$$r_v\cdot r''=\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)u'^2+G_u u'v'+\frac{1}{2}G_v v'^2+Fu''+Gv''.$$

我们得到测地曲率$\frac{1}{r_g}$的计算公式

$$\frac{1}{r_g}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} Eu'+Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2+E_v u'v'+\left(F_v-\frac{1}{2}G_u\right)v'^2+Eu''+Fv'' \\ Fu'+Gv' & \left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)u'^2+G_u u'v'+\frac{1}{2}G_v v'^2+Fu''+Gv'' \end{vmatrix}. \quad (3)$$

现在我们将证明下列定理：

要使曲面上的曲线成为测地线，充要条件是：它的测地曲率等于零.

证明　在曲面上取一系包括所讨论曲线在内的曲线作为参数曲线 v＝常数，这时从(3)式我们得到，所讨论曲线在它一点处的测地曲率为

$$\frac{1}{r_g}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{E\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)-\frac{1}{2}FE_u\right\}u'^3. \quad (4)$$

所以测地曲率$\frac{1}{r_g}=0$的充要条件是

$$E\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)-\frac{1}{2}FE_u=0.$$

然而根据上段的公式(9)，这正好是曲线 v＝常数成为测地线的条件，由此知道定理为真.　　证毕.

另一方面，从上段公式(1)知，$\frac{1}{r_g}=0$ 与 $\sin\theta=0$互为等价条件，因此可得测地线的下列几何学定义：

若曲面上一条曲线在各点的主法线与曲面在同一点的法线重合，则这曲线就称为**测地线**.

3. 测地线坐标

在曲面上取一个单参数的测地线族作为参数曲线v=常数，并以它的直交曲线作为另一系参数曲线u=常数，则(参考第1段公式(9))

$$FE_u - 2EF_u + EE_v = 0, F = 0,$$

也就是$F=0$和$E_v=0$. 所以这时E单为u的函数$E(u)$. 倘若我们取

$$\int \sqrt{E(u)}\, du$$

为新参数，但仍记作u，那么参数曲线不变，而曲面的线素则化成

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2. \tag{1}$$

如此所导入的参数u是一切参数曲线v=常数的弧长，所以我们得到下列定理：

在曲面上曲线Γ的各点作测地线，使它在这点与Γ直交，并以这点出发沿所作测地线取确定的弧长u_0，那么这个端点的轨迹必与所作的单参数测地线族直交.

因此，曲线u=常数称为**测地平行曲线**. 在一般情形下，这系曲线不是测地线.

如下所述，我们还可取更特殊的单参数测地线族和它们的直交曲线. 在曲面的给定点O(称为**极点**)引从O发出的所有测地线，它们当然构成一个单参数族，并在其中选定一条曲线作为**基线**. 于是这系曲线中的任何一条就决定于它与基线在O点的交角的值v. 这系曲线的方程自然是v=常数. 又从O点出发，沿每条曲线v=常数截取同一弧长u. 那么各端点的轨迹形成一条测地平行曲线. 这时，曲面的线素也采取形式(1).

由此我们看到，曲面在 O 点邻近的任何一点 P 有两坐标 (u, v)，前者 u 是连结 O、P 两点测地线的弧长，而后者 v 则是这条测地线与基线在 O 点的交角. 这个坐标系是平面上极坐标在曲面上的推广，所以称为**测地极坐标**.

4. O. Bonnet 公式(1860)

设曲面上一条曲线的方程为

$$\varphi(u,v)=\text{常数}, \tag{1}$$

则它的测地曲率决定于下式：

$$\frac{1}{r_g}=-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\nabla\varphi}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\varphi_v-F\varphi_u}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\nabla\varphi}}\right)\right\}, \tag{2}$$

式中 $\Delta=EG-F^2$，而 $\nabla\varphi$ 则表示 Beltrami 的第一阶微分参数.

证明 根据 Beltrami 微分参数的定义(§20)，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\nabla\varphi}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\varphi_v-F\varphi_u}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\nabla\varphi}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left\{(G\varphi_u-F\varphi_v)\left(\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right)_u+(E\varphi_v-F\varphi_u)\left(\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right)_v\right\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\varphi_u-F\varphi_v}{\sqrt{\Delta}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\varphi_v-F\varphi_u}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\}$$

$$=\nabla\left(\varphi,\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right)+\frac{\Delta\varphi_v}{\sqrt{\nabla\varphi}}.$$

因此，(2)可改写为共变形式

$$\frac{1}{r_g}=-\left\{\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla\varphi}}+\nabla\left(\varphi,\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right)\right\}. \tag{2'}$$

现在我们取新变数

$$v^*=\varphi(u,v)$$

并用与 $\varphi=$ 常数直交的一系曲线作为新的参数曲线

$$u^*=\text{常数},$$

由于等式(2)的右端对于变数变换$(u,v)\to(u^*,v^*)$是共变式，所以我们只要证明下面的简化定理：

关于曲面线素

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2$$

所作的方程

$$\frac{1}{r_g}=-\left\{\frac{\Delta v}{\sqrt{\nabla v}}+\nabla\left(v,\frac{1}{\sqrt{\nabla v}}\right)\right\} \tag{2''}$$

正好表达了曲线$v=$常数的测地曲率.

这时，容易看出

$$\nabla v=\frac{1}{G},\quad \nabla\left(v,\frac{1}{\sqrt{\nabla v}}\right)=\frac{1}{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v},$$

$$\Delta v=\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\right),$$

于是(2″)的右端等于

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}. \tag{3}$$

另一方面，我们应用§21.2的公式(3)来计算曲率$v=$常数的测地曲率. 这时，由于$F=0, v'=v''=0$，所以

$$\frac{1}{r_g}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix}Eu' & * \\ 0 & -\frac{1}{2}E_v u'^2\end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{EE_v}{2}u'^3.$$

然而$v=$常数的弧长$ds^2=Edu^2$，所以$u'=\frac{1}{\sqrt{E}}$，于是

$$\frac{1}{r_g}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{EE_v}{2}\frac{1}{E\sqrt{E}}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}. \tag{4}$$

比较(3)与(4)式，我们便得到(2″) 证毕.

5. Liouville 公式(1850)

设曲面上的参数曲线u和v构成直交系统，而且它们在曲面

上点 P 处的测地曲率分别为 $\frac{1}{r_{g_u}}$ 和 $\frac{1}{r_{g_v}}$. 如果曲面上的曲线 Γ 经过 P 点，并且与 u 曲线的交角为 θ，则 Γ 在 P 点的测地曲率等于

$$\frac{1}{r_g}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{r_{g_u}}\cos\theta+\frac{1}{r_{g_v}}\sin\theta, \tag{1}$$

式中的 s 表示 Γ 的弧长.

证明　因为参数曲线构成直交系统，所以线素采取形式

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2,$$

从此得到

$$(\sqrt{E}\,u')^2+(\sqrt{G}\,v')^2=1,$$

这里 $u'=\frac{du}{ds}$，$v'=\frac{dv}{ds}$. 如果采用定理中所述的交角 θ，便可置

$$\cos\theta=\sqrt{E}\,u',\ \sin\theta=\sqrt{G}\,v'. \tag{2}$$

关于 s 微分(2)的每一个等式的两端，

$$-\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{ds}=\sqrt{E}\left\{u''+\frac{1}{2E}(E_uu'+E_vv')u'\right\},$$

$$\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{ds}=\sqrt{G}\left\{v''+\frac{1}{2G}(G_uu'+G_vv')v'\right\},$$

由此我们导出

$$\frac{d\theta}{ds}=\sqrt{EG}\,(u'v''-u''v')$$

$$+\frac{u'v'}{2\sqrt{EG}}\{E(G_uu'+G_vv')-G(E_uu'+E_vv')\}. \tag{3}$$

然而由 §21.2 的公式(3)以及 $F=0$ 得知

$$\frac{1}{r_g}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} Eu' & \frac{1}{2}E_uu'^2+E_vu'v'-\frac{1}{2}G_uv'^2+Eu'' \\ Gv' & -\frac{1}{2}E_vu'^2+G_uu'v'+\frac{1}{2}G_vv'^2+Gv'' \end{vmatrix}$$

$$=\sqrt{EG}\,(u'v''-u''v')+\frac{u'v'}{2\sqrt{EG}}\{E(G_uu'+G_vv')$$

$$-G(E_u u'+E_v v')\}+\frac{1}{2\sqrt{EG}}(Eu'^2+Gv'^2)(-E_v u'+G_u v'),$$

也就是

$$\frac{1}{r_g}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{2\sqrt{EG}}(-E_v u'+G_u v'), \tag{4}$$

所以特别地以 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 代入(4)时，我们就得到 u 曲线和 v 曲线的测地曲率分别为

$$\frac{1}{r_{g_u}}=-\frac{E_v}{2E\sqrt{G}},\quad \frac{1}{r_{g_v}}=\frac{G_u}{2G\sqrt{E}}. \tag{5}$$

因此，由(2),(4),(5)便可导出公式(1). 证毕.

6. 求测地线的 Darboux 方法

若能把一个曲面的线素化为如下形式

$$ds^2=d\theta^2+\sigma^2 d\theta_1^2, \tag{1}$$

那么根据第 3 段所述的结果我们知道，$\theta_1=$常数就是曲面的测地线，而且 $\theta=$常数是测地平行线的方程. 但是，一个已知曲面的线素往往取一般形式

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2. \tag{2}$$

这一般与我们希望的形式(1) 不同. 那么应该如何决定两个函数

$$\theta=\theta(u,v),\quad \theta_1=\theta_1(u,v), \tag{3}$$

使得线素能从形式(2)化为形式(1)呢？这个问题如能解决，那么曲面上的测地线方程便立即可知悉，且其逆亦真.

取(3)的第一个方程的微分

$$d\theta=\theta_u du+\theta_v dv,$$

于是

$$ds^2-d\theta^2=(E-\theta_u^2)du^2+2(F-\theta_u\theta_v)dudv+(G-\theta_v^2)dv^2. \tag{4}$$

如果(1)式成立的话，那么我们知道(4)的右端应该是关于du,dv的一个线性形式的平方，所以它的判别式必须等于零，也就是

$$(E-\theta_u^2)(G-\theta_v^2)-(F-\theta_u\theta_v)^2=0,$$

改写后，我们得到

$$\frac{E\theta_v^2-2F\theta_u\theta_v+G\theta_u^2}{EG-F^2}=1,$$

这就是说，θ 必须满足微分方程

$$\nabla\theta=1. \tag{5}$$

现在我们取(5)的任何一个解 θ，则(4)可改写为

$$ds^2-d\theta^2=(mdu+ndv)^2, \tag{6}$$

式中的 m,n 均为 u,v 的已知函数. 再假设

$$mdu+ndv \tag{7}$$

的积分因子是$\dfrac{1}{\sigma}$，于是

$$mdu+ndv=\sigma d\theta_1,$$

从而可把线素 ds^2 化为形式(1).

由此可见，如我们想求测地线的方程，必须求解微分方程(5)的同时，还要决定(7)式的积分因子.

Darboux 对这问题进行改良，从而证明如下面的

定理　假如已知微分方程

$$\nabla\theta=1$$

的一个解 $\theta=\theta(u,v,a)$，即含有一个任意常数 a 的解，那么

$$\frac{\partial\theta(u,v;a)}{\partial a}=\text{常数} \tag{8}$$

便是测地线的方程.

证明　我们根据上述方法和已知解 $\theta(u,v;\ a)$ 所决定的函数

$$\theta_1=\theta_1(u,v;a),$$

当然也与 a 有关，而且这时曲面的线素 ds^2 化为(1)的形式.

我们从

$$d\theta=\theta_u du+\theta_v dv,\quad d\theta_1=\theta_{1u}du+\theta_{1v}dv,$$
$$d\frac{\partial\theta}{\partial a}=\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial a}du+\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial a}dv,\ d\frac{\partial\theta_1}{\partial a}=\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\partial a}du+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial v\partial a}dv \tag{9}$$

以及微分 ds^2(注意,ds^2 与 a 无关)的结果

$$0=d\theta\cdot d\frac{\partial\theta}{\partial a}+\sigma d\theta_1\left(\frac{\partial\sigma}{\partial a}d\theta_1+\sigma d\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)$$

得知,$d\theta_1$ 必能除尽 $d\theta$ 与 $d\frac{\partial\theta}{\partial a}$的乘积,所以这就只有两种可能情形. 其一是 $d\theta_1$ 能整除 $d\theta$,这时根据(9)的第一行等式有

$$\begin{vmatrix}\theta_u & \theta_v\\ \theta_{1u} & \theta_{1v}\end{vmatrix}=0,$$

于是 θ 和 θ_1 函数相关,这是不可能的. 其二是 $d\theta_1$ 能整除微分$d\frac{d\theta}{\partial a}$,这就说明了 $\theta_1=$常数与 $\frac{\partial\theta}{\partial a}=$常数是同系曲线的事实. 换句话说,测地线的方程是(8)式.

证毕.

例 Liouville **形式曲面**是线素具有形式

$$ds^2=(U-V)(U_1^2du^2+V_1^2dv^2) \tag{10}$$

的曲面. 这里的 U,U_1 仅仅是 u 的函数,而 V,V_1 仅仅是 v 的函数. 这时,**单用积分**便可求出它的测地线的方程.

事实上,这时

$$\nabla\theta\equiv\frac{1}{U-V}\left[\frac{1}{U_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2\right].$$

凡是满足

$$\frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2+V=U-\frac{1}{U_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2=a \tag{11}$$

的解 θ 必定也是 $\nabla\theta=1$ 的解,式中 a 表示任意常数. 我们从(11)式得到

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}=\pm U_1\sqrt{U-a},\quad \frac{\partial\theta}{\partial v}=\pm V_1\sqrt{a-V},$$

所以

$$\theta(u,v;a)=\pm\int U_1\sqrt{U-a}\,du\pm\int V_1\sqrt{a-V}\,dv, \tag{12}$$

于是曲面(10)的测地线方程为

$$\int\frac{U_1}{\sqrt{U-a}}du\pm\int\frac{V_1}{\sqrt{a-V}}dv=b, \tag{13}$$

这里，b 是另一个任意常数.

Liouville 形式的曲面族比较广泛，它的一个特例就是椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a^2>b^2>c^2>0). \tag{14}$$

设它的一点的椭圆坐标为 λ_1, λ_2，并且记

$$\begin{aligned} &u^2=a^2+\lambda_1,\quad v^2=a^2+\lambda_2,\\ &a^2-b^2=h^2,\quad a^2-c^2=k^2, \end{aligned} \tag{15}$$

我们便可改写它的线素如下[§13，习题 2]：

$$ds^2=(u^2-v^2)\left[\frac{a^2-u^2}{(u^2-h^2)(k^2-u^2)}du^2+\frac{a^2-v^2}{(h^2-v^2)(k^2-v^2)}dv^2\right]. \tag{16}$$

所以椭圆面的测地线方程是

$$\begin{aligned} &\int\sqrt{\frac{a^2-u^2}{(u^2-C)(u^2-h^2)(k^2-u^2)}}du\\ &\pm\int\sqrt{\frac{a^2-v^2}{(C-v^2)(h^2-v^2)(k^2-v^2)}}dv=C', \end{aligned} \tag{17}$$

这里的 C, C' 表示任意常数.

习　题

1. 在线素为

$$ds^2=(U-V)(U_1^2du^2+V_1^2dv^2)$$

的 Liouville 形式曲面上，设它的测地线与曲线 $v=$常数的交角为 ψ. 证明

$$U\sin^2\psi+V\cos^2\psi \tag{18}$$

为常数.

2*. 在椭圆面的给定测地线上取一点 P，设中心到 P 点的切平面的垂直距离为 δ，而且设和 P 点的测地线切线平行的椭圆面半径为 R. 证明乘积 $R\delta$ 同所取的点 P 无关而取定值. (Joachimsthal)

3*. 在椭圆面的脐点处所引的测地线必定经过与这脐点相对的脐点 (S. Roberts).

4. 设 $1/r_u$ 和 $1/r_v$ 分别为曲面上 u, v 两参数曲线在交点处的测地曲率，而且设 Ω 为两参数曲线的交角，则

$$K=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_u}\right)\right\}.$$

(Liouville, 1851)

5. 证明：旋转曲面和二次曲面都是 Liouville 形式曲面.

6. 设 (r,φ) 为曲面上点的测地极坐标，于是

$$ds^2=dr^2+G(r,\varphi)\,d\varphi^2.$$

证明：曲面上曲线 $r=r(\varphi)$ 的测地曲率等于

$$\frac{1}{r_g}=\frac{G\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\left(1+2\dfrac{r'^2}{G}\right)-\sqrt{G}\,r''+\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial\varphi}r'}{G^{\frac{3}{2}}\left(1+\dfrac{r'^2}{G}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

7. 设 $u=u(t)$, $v=v(t)$ 为曲面上一条曲线的方程，则它的测地曲率等于

$$\frac{1}{r_g}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\Gamma}{(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)^{3/2}},$$

其中

$$\begin{aligned}\Gamma=&(EG-F^2)(u'v''-u''v')+(Eu'+Fv')\\&\times\left[\left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)u'^2+G_uu'v'+\frac{1}{2}G_vv'^2\right]\\&-(Fu'+Gv')\left[\frac{1}{2}E_uu'^2+E_vu'v'+\left(F_v-\frac{1}{2}G_u\right)v'^2\right].\end{aligned}$$

8. 旋转曲面上的平行环是具有固定测地曲率的曲线. 球面上的小圆必有固定的测地曲率.

9. 设一个曲面有两系直交曲线，其中一系是测地线，另一系是具常值测地曲率的曲线. 证明这曲面的线素与旋转曲面的线素相同.

10. 柱面的测地线是一般螺线.

§22. 两曲面间的测地线对应

1. Beltrami 定理

如果我们从一个球面(S)的中心把(S)上的各点射影到平面(P)上，那么就得到(S)和(P)之间点与点的对应. 在这个对应之下，平面上的直线和球面上的大圆互相对应. 换句话说，在上述的(S)和(P)的对应之下，双方的测地线互相对应.

Beltrami(1866)从这个简单的事实想到下列更一般的问题:

已知一个曲面时，是否可以建立它到平面上的一个对应，使得曲面上的测地线与平面上的直线对应?

设(x,y)为平面上一点的直交或者斜交坐标，而(λ, μ)为曲面上对应点的曲线坐标，这时

$$x=\theta(\lambda,\mu),\quad y=v(\lambda,\mu) \tag{1}$$

便表示曲面上的点与平面上点之间的一个对应. 在这对应之下，平面上的任何一条直线

$$ax+by+c=0$$

则对应于曲面上的曲线

$$a\theta(\lambda,\mu)+bv(\lambda,\mu)+c=0,$$

且根据假设，这曲线必为曲面的测地线. 因为$\dfrac{a}{c}$和$\dfrac{b}{c}$是两个任意常数，所以上式必须为测地线的二阶微分方程的一个通解 [参照§21.1，公式(7′)]. 于是我们可把上面所提的问题改写成如下形式:

研究能否将一个曲面的测地线方程写成

$$a\theta+bv+c=0, \tag{2}$$

的形式，其中a,b,c是任意常数，而θ和v则为曲面的曲线坐标

(λ,μ)的函数。

我们首先来看 $a=0$ 的情形. 这时方程

$$v=\text{常数}$$

必须表示一族测地线，所以当取这族曲线和它的测地平行线族作为曲面的坐标曲线 u 线和 v 线时，曲面的线素变为

$$ds^2=du^2+C^2dv^2, \tag{3}$$

于是 θ 应当是 u,v 的函数 $\mathscr{F}(u,v)$.

根据 $E=1,F=0,G=C^2$ 和 § 21. 1 的公式(7′)，我们得到测地线的微分方程:

$$v''=-\frac{2C_u}{C}v'-\frac{C_v}{C}v'^2-CC_uv'^3. \tag{4}$$

另一方面，我们可从(2)消去两个常数$\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, 方法是对(2)式关于 u 微分两次，分别得到

$$a\{p+qv'\}+bv'=0,$$

$$a\{r+2sv'+tv'^2+qv''\}+bv''=0,$$

式中

$$p=\theta_u,\ q=\theta_v,\ r=\theta_{uu},\ s=\theta_{uv},\ t=\theta_{vv}.$$

从而有

$$\begin{vmatrix} p+qv' & v' \\ r+2sv'+tv'^2+qv'' & v'' \end{vmatrix}=0,$$

也就是

$$v''=\frac{r}{p}v'+\frac{2s}{p}v'^2+\frac{t}{p}v'^3.$$

但是，(2)是微分方程(4)的通解，把上述方程和(4)作比较应该成立

$$\frac{r}{p}=-2\frac{C_u}{C},\ \frac{2s}{p}=-\frac{C_v}{C},\ \frac{t}{p}=-CC_u. \tag{5}$$

(5)的第一和第二个方程的积分是

$$pC^2=V,\ p^2C=U,$$

这里 $U=U(u),V=V(v)$. 为了方便起见，我们把这两个等式改写为如下形式

$$pC^2=\frac{1}{V^3},\qquad p^2C=\frac{1}{U^3},$$

也就是

$$p=\frac{V}{U^2},\ C=\frac{U}{V^2}. \tag{6}$$

再积分(6)的第一式，

$$\theta=\mathscr{F}(u,v)=V\int\frac{du}{U^2}+V_1,$$

其中 $V_1=V_1(v)$，于是

$$t=\theta_{vv}=V''\int\frac{du}{U^2}+V_1''.$$

把所得的 t,p 和 C 的表达式代入(5)的第三个方程，我们得到

$$V''\int\frac{du}{U^2}+V_1''=-\frac{U'}{UV^3}.$$

这关系式对于 u,v 的一切值都是应该成立的. 假如我们把它关于 u 偏微分一次，则得到

$$\frac{V''}{U^2}=-\frac{1}{V^3}\left(\frac{U'}{U}\right)',$$

改写后便是

$$V''V^3=-U^2\left(\frac{U'}{U}\right)',$$

由于等式两端的变数是分离的，所以它们必定都等于一个与 u,v 均无关的常数，我们把这常数记为 $-h$. 这样，

$$V''V^3=-h,\quad U^2\left(\frac{U'}{U}\right)'=h.$$

为了积分第二式，首先把它改写为

$$2\frac{U'}{U}\left(\frac{U'}{U}\right)'=2h\frac{U'}{U^3},$$

由此易得

$$\left(\frac{U'}{U}\right)^2=-\frac{h}{U^2}+k \quad (k\text{ 为任意常数}),$$

亦即

$$U'^2=-h+kU^2.$$

微分后又可得到

$$U''=kU.$$

另一方面，当曲面的线素为 $ds^2=du^2+C^2dv^2$ 时，总曲率 K 必决定于下列方程[参考下一节 § 23.1]

$$K=-\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

从(6)的第二方程和刚刚求出的 U'' 得出

$$K=-\frac{U''}{U}=-k.$$

我们把上述结果综合成下列定理：

如果一个曲面能和平面建立对应，使得所有的测地线对应于平面上的直线，那么这曲面的总曲率必取常值.

这个事实反过来是否成立？对此我们讨论如下.

设曲面具有常值总曲率 $K=k$. 如果我们取适当的参数 u, v 使它的线素化为

$$ds^2=du^2+C^2dv^2, \tag{7}$$

那么

$$-\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}=k. \tag{8}$$

当 $k=0$，(8)的积分是

$$C=Vu+V_1, \tag{9}$$

式中的 V,V_1 仅仅为 v 的函数. 以下采用同样的记法.

当 $k=\frac{1}{a^2}>0$,

$$C=V\sin\frac{u}{a}+V_1\cos\frac{u}{a}. \tag{10}$$

当 $k=-\frac{1}{a^2}<0$,

$$C=V\sinh\frac{u}{a}+V_1\cosh\frac{u}{a}. \tag{11}$$

在后两个曲面的情形下，如果我们采用 $\frac{u}{a}$ 和 $\frac{v}{a}$ 作为新参数并仍记作 u 和 v，那么根据常数 k 为零、正或负，曲面的线素分别是

$$ds^2=du^2+(Vu+V_1)^2dv^2, \tag{12}$$

$$ds^2=a^2[du^2+(V\sin u+V_1\cos u)^2dv^2], \tag{13}$$

$$ds^2=a^2[du^2+(V\sinh u+V_1\cosh u)^2dv^2]. \tag{14}$$

这三个线素是常总曲率曲面线素的特有形式. 如果我们取定一点 $(u=0, v=0)$，并取由此点出发的测地线 $v=$ 常数，则当 $u=0$ 时由于 $C=0$，所以 $V_1=0$. 再用 $\int Vdv$ 作为新参数 v，那么我们便容易把三个线素改写成下面更简洁的形式:

$$ds^2=du^2+u^2dv^2, \tag{15}$$

$$ds^2=a^2(du^2+\sin^2u dv^2), \tag{16}$$

$$ds^2=a^2(du^2+\sinh^2u dv^2). \tag{17}$$

在完全决定这种曲面的线素以后，我们必须考察它的测地线能否对应于平面上的直线.

为此，我们来求各曲面的测地线方程.

(1) $K=0$: $ds^2=du^2+u^2dv^2$,

$$\nabla\theta \equiv \frac{1}{u^2}[\theta_v^2 + u^2\theta_u^2] = 1,$$

$$C_v^2 = u^2(1 - u^2\theta_u^2) = A^2 \quad (A\ \text{是任意常数}),$$

$$\theta_v = A, \theta_u = \pm\frac{\sqrt{u^2 - A^2}}{u},$$

$$\theta = \theta(u,\ v;\ A) = Av \pm \int\frac{\sqrt{u^2 - A^2}}{u}du.$$

所以测地线的方程为

$$\frac{\partial\theta}{\partial A} \equiv v \pm A\int\frac{du}{u\sqrt{u^2 - A^2}} = \text{常数},$$

$$v \pm \arccos\frac{A}{u} = \text{常数},$$

也就是

$$Au\cos v + Bu\sin v + C = 0. \tag{18}$$

由此可见，只要在曲面与平面之间建立起对应

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,$$

就能使曲面上的测地线对应于平面上的直线。

(2) $K = \frac{1}{a^2}$: $ds^2 = a^2[du^2 + \sin^2 u dv^2]$,

$$\nabla\theta \equiv \frac{1}{a^2\sin^2 u}[\theta_v^2 + \sin^2 u\cdot\theta_u^2] = 1,$$

$$\theta_v^2 = \sin^2 u\cdot(a^2 - \theta_u^2) = A^2,$$

$$\theta(u, v; A) = Av \pm \int\frac{\sqrt{a^2\sin^2 u - A^2}}{\sin u}du,$$

所以测地线的方程为

$$v \pm A\int\frac{du}{\sin u\cdot\sqrt{a^2\sin^2 u - A^2}} = \text{常数},$$

$$v \pm \arccos\left(\frac{A}{\sqrt{a^2 - A^2}\,\mathrm{tg}\,u}\right) = \text{常数},$$

也就是

$$A\mathrm{tg}u\cos v + B\mathrm{tg}u\sin v + C = 0. \tag{19}$$

因此，

$$x = \mathrm{tg}u\cos v, \qquad y = \mathrm{tg}u\sin v$$

便是使测地线对应于平面上直线的所求的对应。

(3) $K = -\dfrac{1}{a^2}$: $ds^2 = a^2[du^2 + \sinh^2 u dv^2]$.

用类似方法可求出测地线的方程为

$$A\mathrm{tgh}u\cos v + B\mathrm{tgh}u\sin v + C = 0. \tag{20}$$

从而使测地线与平面上直线对应的点对应是

$$x = \mathrm{tgh}u\cos v, \quad y = \mathrm{tgh}u\sin v.$$

综合以上结果，我们就得到

Beltrami 定理 当曲面上的点与平面上的点互相对应时，使曲面上的测地线对应于平面上的直线，充要条件是：曲面的总曲率为常值。

特别值得注意的是，利用上面得到的三种对应时，我们可把各曲面的线素分别化为下列形式：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$ds^2 = a^2\frac{dx^2 + dy^2 + (xdy - ydx)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

$$ds^2 = a^2\frac{dx^2 + dy^2 - (xdy - ydx)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

这也是Beltrami 所发现的结果.

2. Dini 定理

我们进一步研究下列问题：

当两个已知曲面的点互相对应时，能否使双方的测地线互相对应？

这个问题最早是由 Beltrami 提出的，后来为 U. Dini(1869)

所解决. 由于 Dini 的方法是基于 Tissot 定理的，我们先叙述这个定理.

Tissot 定理 设两个实曲面的点互相对应，则在各曲面上必存在一个直交曲线系统，使它们在这个对应之下互相对应. 如果这个对应不是保角对应，那么这种直交系统仅仅只有一对.

证明 设 S 和 S_1 为所讨论的两曲面，M 和 M_1 为它们的对应点，则对于 S 在 M 的任何切线 Mt，就有一条对应切线 M_1t_1. 换句话说，当 S 上的任何一曲线在 M 点与 Mt 相切时，它在 S_1 上的对应曲线在点 M_1 必定与 M_1t_1 相切. 这两切线 Mt 和 M_1t_1 之间的对应是射影对应. 事实上，设

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)),$$

$$\boldsymbol{r}_1(u_1,v_1)=(x_1(u_1,v_1),\ y_1(u_1,v_1),\ z_1(u_1,v_1))$$

分别为 S 和 S_1 的方程，而且

$$u_1=\varphi(u,v),\quad v_1=\psi(u,v)$$

是给定的对应，则

$$du_1=\varphi_u du+\varphi_v dv,\qquad dv_1=\psi_u du+\psi_v dv,\qquad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\neq 0.$$

所以任何四条切线 Mt 与它们对应的四条切线 M_1t_1 必有相同的交比，于是两线束 Mt 和 M_1t_1 构成射影对应.

在点 M 和 M_1，我们各以相应的极小切线 Mi, Mj; M_1i_1, M_1j_1 为复直线，决定两切线对合 I_M 和 I_{M_1}. 根据假设，两曲面都是实曲面，所以 I_M 和 I_{M_1}. 均为椭圆的对合. 设 I'_M 为在点 M 对应于 I_{M_1} 的对合，则 I_M 和 I'_M 是同心的，且其中有一个是椭圆的，所以必有公共直线对 Mu 和 Mv. 这两切线在 M 直交，而且对应的切线 M_1u_1 和 M_1v_1 也必直交. 这样，我们证明了 Tissot 定理的前半的结论.

如果 I_M 和 I'_M 是同一个对合，则 S 与 S_1 的极小曲线互相对

应，于是S与S_1之间的对应必定是保角的[参考§18.1].

这里举出一个例外情形．当两对合I_M和$I_{M'}$有一公共复直线时，两曲面S和S_1上各有一系极小曲线互相对应．于是两曲面的对应直交曲线系统也就是这两系极小曲线．这个例外情形是S. Lie所指出的．当然，在两实曲面的场合，这种例外是不可能发生的．证毕．

现在我们来叙述Dini的研究于下．

设两曲面S与S_1之间以实点互相对应．根据Tissot定理必有对应的直交曲线系统，从而我们取它们作为各自的参数曲线u和v时，就可把各曲面的线素分别写为

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2,\quad ds_1^2=E_1du^2+G_1dv^2. \tag{1}$$

S的测地线微分方程是$1/r_g=0$，也就是[参考§21.2]

$$2(dud^2v-dvd^2u)-\frac{1}{G}\frac{\partial E}{\partial v}du^3+\left(\frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)du^2dv$$

$$-\left(\frac{2}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial v}\right)dudv^2+\frac{1}{E}\frac{\partial G}{\partial u}dv^3=0.$$

若用E_1, G_1替换上式中的E, G，便得到曲面S_1的测地线微分方程．为了使两曲面的测地线能互相对应，其充要条件应是上述的两个微分方程等价．于是我们得到

$$\begin{gathered}\frac{1}{G}\frac{\partial E}{\partial v}=\frac{1}{G_1}\frac{\partial E_1}{\partial v},\ \frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u}=\frac{2}{G_1}\frac{\partial G_1}{\partial u}-\frac{1}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial u},\\ \frac{2}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{2}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial v}-\frac{1}{G_1}\frac{\partial G_1}{\partial v},\ \frac{1}{E}\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{1}{E_1}\frac{\partial G_1}{\partial u}.\end{gathered} \tag{2}$$

积分第二和第三方程，

$$\frac{E}{G^2}=\frac{E_1}{G_1^2}V^{-3},\qquad \frac{G}{E^2}=\frac{G_1}{E_1^2}U^{-3},$$

式中$U=U(u), V=V(v)$．因此，

$$E_1=\frac{E}{U^2V},\qquad G_1=\frac{G}{UV^2}.$$

将此值分别代入(2)的第一和第四方程，得

$$(U-V)\frac{\partial E}{\partial v}=-V'E,$$

$$(U-V)\frac{\partial G}{\partial u}=U'G.$$

积分后我们得到

$$E=U_1^2(U-V),\quad G=V_1^2(U-V),$$

其中 $U_1=U_1(u)$，$V_1=V_1(v)$.

由此我们知道，两曲面的线素分别取如下形式：

$$ds^2=(U-V)(U_1^2du^2+V_1^2dv^2),\tag{3}$$

$$ds_1^2=\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{U}\right)\left(\frac{U_1^2}{U}du^2+\frac{V_1^2}{V}dv^2\right).\tag{4}$$

因而所求的两曲面都为 Liouville **形式曲面**[参考 § 21. 6].

反过来，凡是线素为(3)，(4)形式的两曲面，它们之间必能建立一个对应，使得测地线互相对应.

其实，曲面(3)的测地线按 § 21. 6 决定于方程

$$\int\frac{U_1du}{\sqrt{U-a}}\pm\int\frac{V_1dv}{\sqrt{a-V}}=a',\tag{5}$$

而且对于置换

$$U\to-\frac{1}{U},\ V\to-\frac{1}{V},\ U_1\to\frac{U_1}{\sqrt{U}},\ V_1\to\frac{V_1}{\sqrt{V}},$$

$$-\frac{1}{a}\to a,\quad a'\to a'\sqrt{a},$$

方程(5)仍旧保持其原状，而 ds^2 则化为 ds_1^2. 所以我们得到

Dini 定理 设两曲面的点互相对应，而且一方的测地线对应于另一方的测地线，则两曲面皆为 Liouville 形式的曲面，且其逆亦真.

值得注意的是，如果我们取任何常数 m，并分别用

$$U+m,\quad V+m$$

来替换U,V,这时(3)式不变,而(4)式则为

$$d\bar{s}_1^2=\left(\frac{1}{V+m}-\frac{1}{U+m}\right)\left(\frac{U_1^2}{U+m}du^2+\frac{V_1^2}{V+m}dv^2\right). \tag{6}$$

所以,对于一个已知的 Liouville 形式曲面,可得单参数的 Liouville 形式曲面族,使这族中的任何曲面和已知曲面之间也能建立起测地线互相对应的点对应.

习　题

1. 设曲面的线素为

$$ds^2=(u^4-v^4)\left(\varphi(u)\,du^2+\varphi\left(\frac{1}{v}\right)dv^2\right),$$

证明:由 $\bar{u}=\frac{1}{v},\bar{v}=\frac{1}{u}$所定义的曲面到自身的对应,能使测地线对应于测地线.

2*. 若曲面与平面的点互相对应,而且曲面上的测地线对应于平面上的圆周,则曲面必有常总曲率(Haack,1928).

3*. 试求满足下列条件的所有曲面:当它与平面的点互相对应时,其测地线的象为抛物线 $y=\lambda x^2+\mu x+\nu$. (Kasner,1905)

4*. 在上题的曲面中决定能与平面成保角对应的曲面 (Kasner, 1905)

§ 23. 曲面上的几何学

1. Gauss 曲率 K

K 的原来定义是[§ 15. 3]

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

从形式上看,K 与曲面的第二基本量 L,M,N 有关. 但是 Gauss (1826)曾证明:单由第一基本量 E,F,G 及其导数便可以表示 K. 我们根据 R. Baltzer(1886)的方法证明于下.

记 $\Delta = EG - F^2$，那么

$$\Delta^2 K = (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) - (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)^2$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}^2 & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} \\ \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & E & F \\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}.$$

然而如果我们微分 $E = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u$, $F = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v$, $G = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$，那么可得到

$$\frac{1}{2}E_u = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uu}, \quad \frac{1}{2}E_v = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv},$$

$$\frac{1}{2}G_u = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uv}, \quad \frac{1}{2}G_v = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{vv},$$

$$F_u = \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uv},$$

$$F_v = \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{vv},$$

$$F_{uv} = \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} + \boldsymbol{r}_{uuv}\cdot\boldsymbol{r}_v + \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uvv} + \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},$$

$$\frac{1}{2}E_{vv} = \boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_{uvv} + \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},$$

$$\frac{1}{2}G_{uu} = \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_{uuv} + \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{r}_{uv},$$

所以

$$F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} = \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}^2,$$

$$F_u-\frac{1}{2}E_v=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{r}_v,$$

$$F_v-\frac{1}{2}G_u=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{r}_u.$$

于是我们最后得到

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

这就是 R. Ealtzer 所得的形式.

上述定理具有下面的重要几何意义:

我们把一个曲面看成如一张坚韧薄纸那样的东西，它不能伸缩而能不打折地改变形状. 经过这种变形以后，它的线素

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

仍不改变原来的形式. 换句话说，三个函数 E,F,G 对于曲面的变形是不变的，从而它们的导数也是不变的. Gauss 定理的内容指出，**曲面的总曲率是变形的不变量**.

注意：如果我们取适当的参数 u, v，使曲面的线素写为(§21.3)

$$ds^2=du^2+G(u,v)dv^2,$$

则从 $E=1, F=0$ 得到

$$G^2K=\frac{1}{4}G_u^2-\frac{1}{2}GG_{uu},$$

改写后，

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

如果记 $G=C^2$，则[参照 § 22.1]

$$K=-\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

2. 测地线

前面[§ 21.1]已经说过，曲面上的测地线是平面上直线的推广．因为测地线在曲面上的几何学中所占的地位极为重要，所以我们特为详述于下．

依照以前的结果[§ 21.2]得知，当曲面的线素取

$$ds^2=Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2$$

的形式时，它的测地线的微分方程是 $1/r_g=0$，即

$$\begin{vmatrix} Eu'+Fv' & \frac{1}{2}E_uu'^2+E_vu'v'+\left(F_v-\frac{1}{2}G_u\right)v'^2+Eu''+Fv'' \\ Fu'+Gv' & \left(F_u-\frac{1}{2}E_v\right)u'^2+G_uu'v'+\frac{1}{2}G_vv'^2+Fu''+Gv'' \end{vmatrix}=0, \tag{1}$$

式中的微分都是关于曲线弧长 s 所作的．但对于任何变数 t，上式也对．事实上，在参数变换 $t=t(s)$ 之后，

$$u'=\frac{du}{dt}\frac{dt}{ds}=\dot{u}\frac{dt}{ds},$$

$$u''=\frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{du}{dt}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)=\ddot{u}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{u}\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

于是

$$\begin{vmatrix} Eu'+Fv' & Eu''+Fv'' \\ Fu'+Gv' & Fu''+Gv'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E\dot{u}+F\dot{v} & E\ddot{u}+F\ddot{v} \\ F\dot{u}+G\dot{v} & F\ddot{u}+G\ddot{v} \end{vmatrix} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2,$$

所以我们在(1)中可用“·”替换“′”.

特别地，我们选定参数 u, v，使

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2. \tag{2}$$

这时测地线的微分方程就为

$$\begin{vmatrix} u' & -\frac{1}{2}G_u v'^2 + u'' \\ Gv' & G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Gv'' \end{vmatrix} = 0,$$

也就是

$$\sqrt{G}\,(u'v''-u''v') + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}u'v'^2 + G\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}v'^3 + 2\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}u'^2v' = 0. \tag{3}$$

若取 $t=v$，则 $v'=1, v''=0$，于是我们得到

$$\sqrt{G}\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\frac{du}{dv} + 2\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{\partial\sqrt{G}}{du}G. \tag{4}$$

根据这个方程我们容易证明下面的

定理 设曲面上的一条测地线与取作为测地线的参数曲线 u 的交角为 $\alpha(u,v)$，则

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{du}. \tag{5}$$

证明 设 $u=u(v)$ 为所讨论的测地线，则

$$\cos\alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2+Gdv^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}},$$

$$\sqrt{G}\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{du}{dv}.$$

对它进行微分，

$$\frac{d^2u}{dv^2}=\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{du}{dv}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\right)\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dv}\sqrt{G},$$

也就是

$$\frac{d^2u}{dv^2}=\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dv}\sqrt{G}. \tag{6}$$

另一方面，从(4)式我们得出

$$\frac{d^2u}{dv^2}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\frac{du}{dv}+2\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\sqrt{G}$$

$$=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\operatorname{ctg}\alpha+2\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{ctg}^2\alpha+\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v},$$

把它与(6)式作比较，便导出

$$\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{ctg}^2\alpha+\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=-\frac{1}{\sin^2\alpha}\sqrt{G}\frac{d\alpha}{dv},$$

也就是所要证的

$$\frac{d\alpha}{dv}=-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

证毕.

3. 关于测地线三角形的 Gauss 定理

大家知道，平面上三角形内角之和等于 π. 这定理在曲面上的推广就是下述的 Gauss 定理.

定理 设曲面上的三条测地线构成一个三角形，且其内角为 $\angle A,\angle B,\angle C$，则

$$\iint K\,dS=\angle A+\angle B+\angle C-\pi, \tag{1}$$

式中，dS 表示曲面的面积元素，K 表示总曲率，而且二重积分的区域是这些测地线所围成的三角形领域.

证明 取 A 作为测地线极坐标系统的极点，并以 $\overset{\frown}{AB}$ 为基线 $v=0$，我们就有

$$ds^2 = du^2 + G dv^2, \tag{2}$$

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{3}$$

我们先来证明

$$\left.\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right|_{u=0} = 1. \tag{4}$$

因为在点 A, u 曲线退化成一点，它的方向无法确定，所以

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

于是

$$G(0, v) = 0. \tag{5}$$

现在在同一测地平行线上取两点 $M_0(u, 0)$ 和 $M_1(u, v_1)$，它们间的曲线弧 $\overset{\frown}{M_0M_1}$ (参见图 18) 等于

$$\int_0^{v_1} \sqrt{G}\, dv.$$

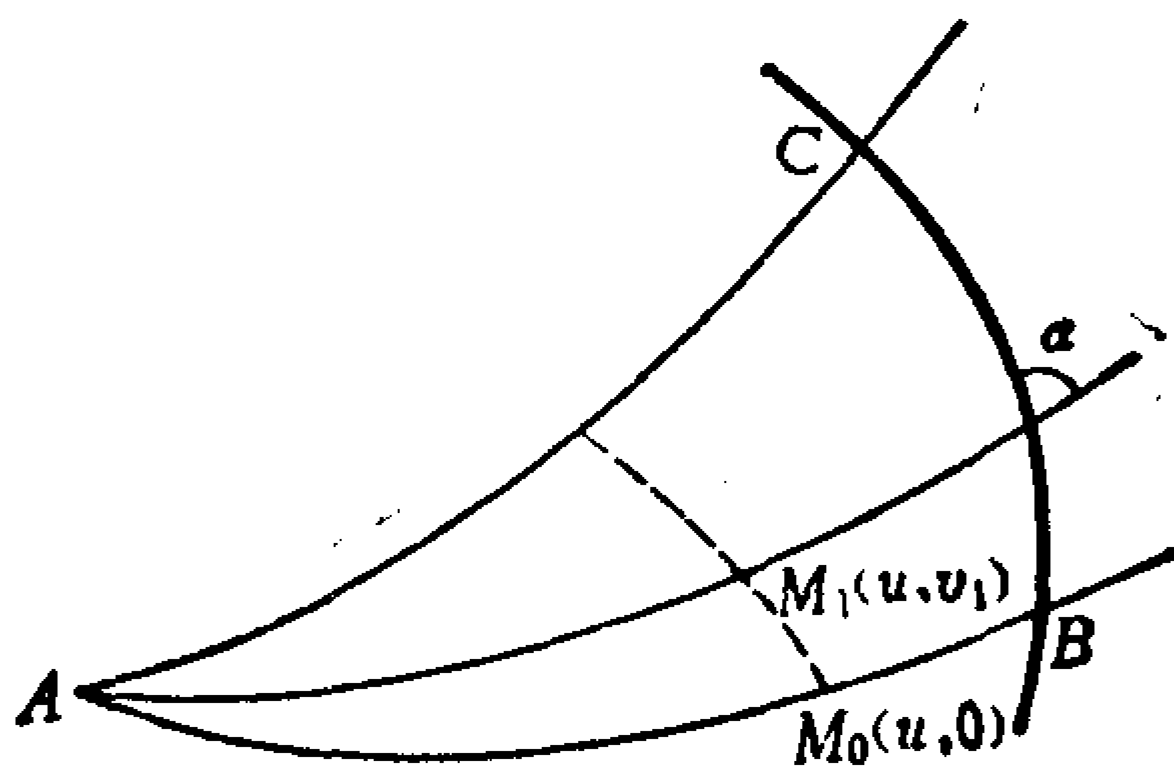


图　18

当 $u \to 0$ 时，$\overset{\frown}{M_0M_1} : u \to v_1$. 然而由(5)式我们有

$$v_1 = \lim_{u\to 0} \frac{\int_0^{v_1} \sqrt{G}\, dv}{u} = \int_0^{v_1} \lim_{u\to 0} \frac{\sqrt{G(u,v)} - \sqrt{G(0,v)}}{u} dv$$

$$= \int_0^{v_1} \left.\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right|_{u=0} dv.$$

这对所有的 v_1 成立，从而微分后就得(4)式.

我们应用上段公式(5)和这里的公式(5)来证明本定理. 由(2)和(3)式,

$$dS=\sqrt{G}\,du\,dv,$$

$$\iint K\,dS=-\int_0^{\angle A}\int_0^u \frac{\partial^2\sqrt{G(u,v)}}{\partial u^2}du\,dv$$

$$=-\int_0^{\angle A}\frac{\partial\sqrt{G(u,v)}}{\partial u}\Big|_{u=0}^{u=u}dv$$

$$=\int_0^{\angle A}\left(1-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)dv=\int_0^{\angle A}\left(1+\frac{d\alpha}{dv}\right)dv$$

$$=\angle A+\alpha(u,v)\Big|_{v=0}^{v=\angle A}$$

$$=\angle A+\angle C-(\pi-\angle B)$$

$$=\angle A+\angle B+\angle C-\pi.$$

证毕.

特殊情形.

当 $K=\frac{1}{a^2}>0$ 为正常数时，设测地线三角形的面积为 Δ，则由(1)得到

$$\Delta=a^2(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)>0.$$

所以在总曲率 K 为正常数的曲面上，任何测地线三角形内角的和大于 π.

反之，当 $K=-\frac{1}{a^2}<0$ 时，在负常总曲率的曲面上，任何测地线三角形的内角和小于 π.

若 $K=0$，则所讨论的曲面是平面的变形，于是任何测地线三角形内角之和等于 π. 这是当然的.

4. 测地线离差

设 B 为曲面上的一条测地线，而且 g 是 B 的邻近测地线. 将 g

上的任何一点M正射影到B上，设它的垂足为P. 从B上的任何一定点O到P的曲线弧长记为σ，且令$\widehat{MP}=\delta n$，则成立

$$\frac{d^2\delta n}{d\sigma^2}+K(\sigma)\delta n=0, \tag{1}$$

式中的$K(\sigma)$表示曲面在P的总曲率.

公式(1)称为**关于测地线离差δn的 Jacobi 方程**. 证明如下.

记B为$v=0$，并取包括g在内的一系测地线为$v=$常数. 如果$u=$常数是测地平行线，则

$$ds^2=du^2+Gdv^2,$$

而且

$$\widehat{MP}=\delta n=\sqrt{G}\,dv.$$

然而$\sigma=u$，且按本节的第1段我们有

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}+K\sqrt{G}=0,$$

所以，当$v=0$时便成立

$$\frac{d^2\delta n}{d\sigma^2}+K(\sigma)\delta n=0.$$

这个结果有高维黎曼空间中的推广(T. Levi-Civita, 1926).

5. Gauss-Bonnet 公式

设C是曲面上的简单(即自身不相交)封闭曲线，$1/r_g$是它的测地曲率，K是曲面的总曲率，dS是曲面的面积元素，且$\angle A_1$, $\angle A_2, \cdots, \angle A_n$是$C$的各角点处的内角，则关于$C$所包围的曲面区域所作的二重积分

$$\iint K\,dS=\sum_{i=1}^{n}\angle A_i-(n-2)\pi-\oint_C\frac{ds}{r_g}. \tag{1}$$

这个结果最初是 O. Bonnet(1848)证明的，而它正好是前面第

3 段所述 Gauss 公式的推广．这是因为，在(1)中只要取 $n=3$，$\frac{1}{r_g}=0$ 便可导出．所以公式(1)通称为 Gauss-Bonnet 公式.

为了证明(1)，我们在曲面上取适当的直交参数曲线 u 和 v[即§18 中的 ξ 和 η]，使得

$$ds^2=E(u,v)(du^2+dv^2). \tag{2}$$

这时，由于 $E=G, F=0$，所以依照§23.1 我们得到

$$K=-\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2 \ln E}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \ln E}{\partial v^2}\right), \tag{3}$$

而且依照§23.2 又有

$$\frac{1}{r_g}=\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{dv}{du}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial \ln E}{\partial u}\frac{dv}{ds}-\frac{1}{2}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\frac{du}{ds}. \tag{4}$$

如果记

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{dv}{du}, \tag{5}$$

那么

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{ds}{r_g}&=\oint_C d\varphi+\frac{1}{2}\oint_C\left(\frac{\partial \ln E}{\partial u}\frac{dv}{ds}-\frac{\partial \ln E}{\partial v}\frac{du}{ds}\right)ds\\&=\oint_C d\varphi+\frac{1}{2}\iint\left(\frac{\partial^2 \ln E}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \ln E}{\partial v^2}\right)du\,dv\\&=\oint_C d\varphi-\iint K\,dS.\end{aligned} \tag{6}$$

接着要计算的是上式右端的线积分．由(2)式我们知道，曲面与 (u,v) 平面之间的对应是保角对应，所以曲线 C 在参数平面上的象 C^* 也有 n 个角点，且其内角也等于 $\angle A_1, \angle A_2, \cdots, \angle A_n$．于是

$$\oint_C d\varphi=\oint_{C^*} d\operatorname{arc\,tg}\frac{dv}{du}=2\pi-\sum_{i=1}^{n}(\pi-\angle A_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\angle A_i-(n-2)\pi. \tag{7}$$

由(6)和(7)立即可得出(1).　　证毕.

当我们应用 Gauss-Bonnet 公式到曲面上特殊选定的不同曲线 C 时，便可得到各种不同的结果．这里仅举出几个比较重要的于下．

(A) 测地曲率的新定义

设 A, B 为曲面上一条曲线 C 的两邻近点．在 A 和 B 分别作和 C 相切的测地线，设它们的交点为 T，交角为 $\Delta\tau$，称

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds} \tag{8}$$

为 C 在 A 的**测地曲率**，这里的 Δs 表示 A,B 间的弧长．

这个定义显然是平面曲线曲率的推广．我们要证明的是：新定义下的测地曲率必须与以前[§21.2]所定义的 $1/r_g$ 一致．

取三条由曲线弧 $\widehat{AT},\widehat{TB}$ 和 $\widehat{BA}$ 所组成的封闭曲线 C，我们应用 Gauss-Bonnet公式到 C．因为沿 $\widehat{AT},\widehat{TB}$，$1/r_g$ 都等于 0，而且这时 $n=3$, $\angle A_1=0$, $\angle A_2=\pi-\Delta\tau$, $\angle A_3=0$(参照图 19)，所以

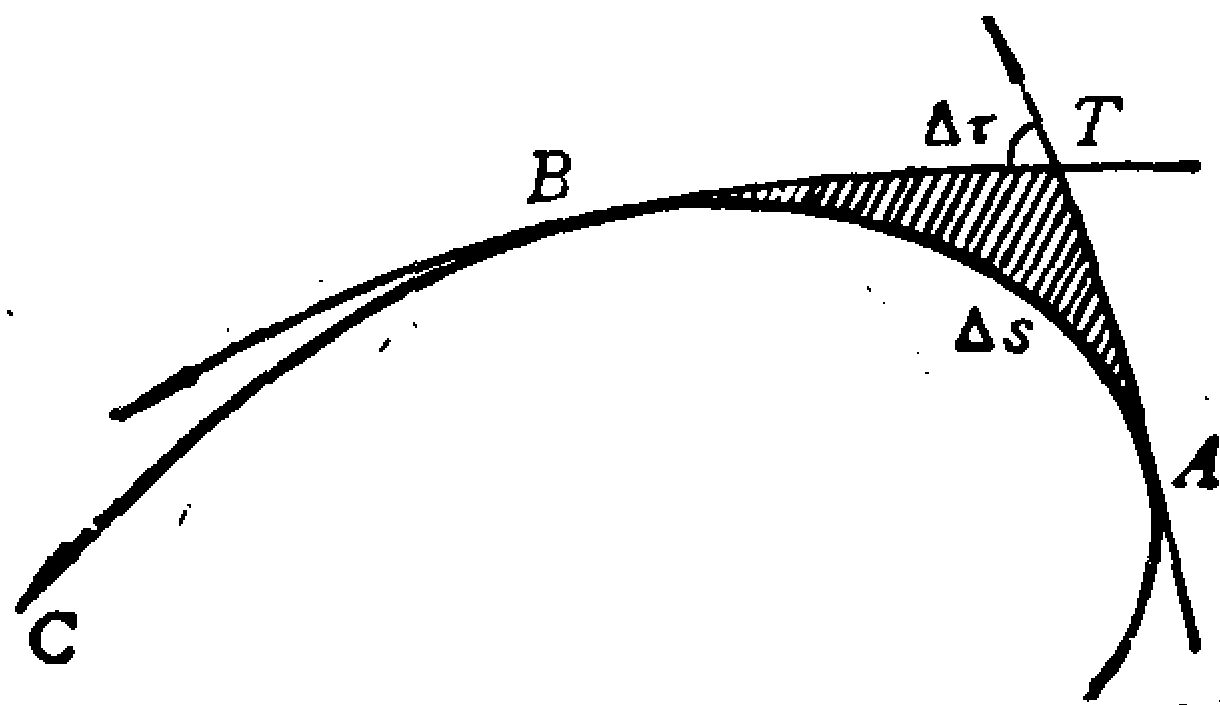


图 19

$$\int_B^A\frac{ds}{r_g}=\pi-\Delta\tau-\pi-\iint K\,dS,$$

也就是

$$\frac{1}{\Delta s}\int_A^B\frac{ds}{r_g}=\frac{\Delta\tau}{\Delta s}+\frac{1}{\Delta s}\iint K dS. \tag{9}$$

设 K_m 表示 $|K|$ 在 $ATBA$ 所包围的曲面区域内所取的最大值，则

$$\left|\frac{1}{\Delta s}\iint K dS\right|\leqq\frac{K_m}{\Delta s}\iint dS.$$

但是 $\iint dS$ 是 $ATBA$ 所包围的曲面区域的面积，所以对于任何正数 ε 必有正数 δ，使得对于 $\Delta s<\delta$ 成立

$$\frac{1}{\Delta s}\iint dS<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\iint K dS=0. \tag{10}$$

另一方面根据积分的中值定理，

$$\int_A^B\frac{ds}{r_g}=\frac{\Delta s}{r_g(\sigma)} \qquad (0<\sigma<\Delta s),$$

所以

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\int_A^B\frac{ds}{r_g}=\frac{1}{r_g(0)}. \tag{11}$$

从(9)、(10)和(11)式得知，在点 A 成立

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{r_g}. \tag{12}$$

(B) 封闭曲面的全曲率

作为例子，我们先来讨论与球面同胚的曲面．用自身不相交的封闭光滑曲线把整个曲面分为两块单连通的区域(I)、(II)，而且应用积分公式(1)到这两块曲面．我们得到

$$\begin{aligned}&\oint\frac{ds}{r_g}+\iint_{(I)}K dS=2\pi,\\&\oint\frac{ds}{r_g}+\iint_{(II)}K dS=2\pi.\end{aligned} \tag{13}$$

如所知，线积分的正向规定是：沿曲线正向前进时，曲线所围的区域始终在曲线的左侧．换言之，(13)的两式中的前两个线积分，它们的道路虽相同，但正方向恰好相反．如果我们把(13)的两式边边相加，这两个线积分相互抵消，从而得到

$$\iint K dS = 4\pi. \tag{14}$$

这就是说，凡是与球面同胚的曲面，它的全曲率等于 4π．

其次，我们取一个与环面同胚的曲面作为第二个例子．沿着环面的一条经线和一条纬线的同胚象分割这个曲面，于是把曲面化为一个单连通区域．这个区域是由一条具四重叠角点的境界所围成的．这种分割称为与环面同胚曲面的规范分割．现在我们应用 Bonnet 定理到这个曲面．由于这时沿各段境界的线积分都按相反方向各积一次(参照图 20)，所以公式中的线积分部分互相抵消，只留下角点的四个内角，而且其和为 2π．因此，对于这个与环面同胚的曲面便成立

$$\iint K dS = 0. \qquad (14)_1$$

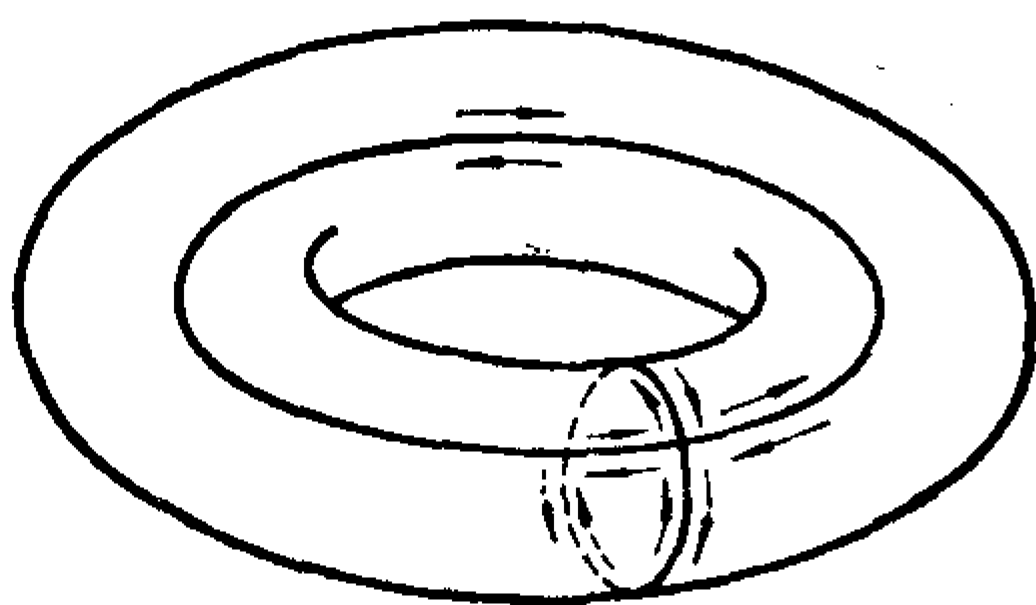


图 20

由于环面是与添加一个柄的球面是同胚的，所以所论的曲面也是如此．

根据同样的道理，关于一个与添加 p 个柄的球面同胚的封闭曲面(图 21，$p=2$)，我们也有相应的规范分割．图 20 示意了 $p=2$ 的分割．由此我们可推导最一般的公式

$$\iint K dS = 4\pi(1-p). \tag{14}_p$$

非负整数 p 是 Riemann(1857)所导入的曲面**亏格**.

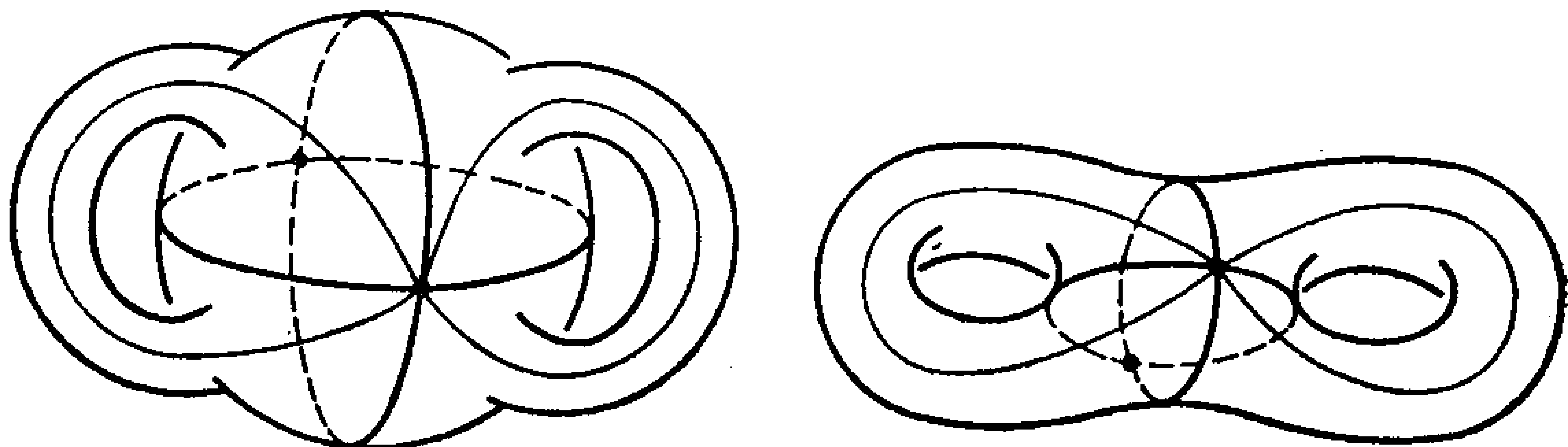


图 21

我们从 Gauss-Bonnet 公式出发，终于达到曲面微分几何学与**拓扑学**之间的联系. 这个出乎意料的事实说明了Gauss-Bonnet 公式的重要性. 根据这个方法我们还可以导出 Euler 的**多面体定理**(其实比 Euler 发现这定理 (1752) 还早一百年，这个结果已在 Cartesius 写给 Leibniz 的信中见到)，借以说明微分几何学与拓扑学之间的密切关系.

取一个处处正则的封闭曲面 S，设 S 由一些单连通的面块 E 所组成，而且这些面块满足下列条件：凡是相邻的两块 E 只交于一条公共的棱，也就是 S 上的一段正则曲线弧；棱的端点称为顶点，在各顶点至少有三条棱相会. 如果我们能对所有面块 E 的边界曲线规定正向，使得每一条棱在它所围成的两块 E 取相反的方向，那么曲面 S 便称为**可定向曲面**. 对于每块 E，我们都可写出Gauss-Bonnet 公式

$$\int \frac{ds}{r} + \sum_E (\pi - \psi) + \iint_E K dS = 2\pi,$$

式中 $0 \leqq \psi \leqq \pi$ 表示 E 在各角点处的内角. 现在设 S 是由 f 块 E 组成的，将上列的诸等式边边相加，并且注意到 S 是封闭曲面，曲线

积分$\int \frac{ds}{r_g}$在每一条棱上正反积分两次，因而全部相抵消，所以我们得到

$$\sum_S (\pi-\psi)+\iint_S K\,dS=2\pi f.$$

接下来计算等式左端的第一个和式. 对 π 求和时，它的个数等于棱的数目的两倍，而且内角 ψ 的总和等于顶点的数目乘以 2π. 如果我们记棱的总数为 e，顶点的总数为 v，则

$$\sum_S (\pi-\psi)=2\pi(e-v).$$

因而得到公式

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,dS=f-e+v. \tag{15}$$

要注意的是，上式左边与 S 被分割为多少块 E 的情况毫无关系，而且右边也不依赖于曲面 S 的所有连续变形. 如果我们比较$(14)_1$与(15)，那么就获得所求的 Euler **多面体公式**

$$f-e+v=2(1-p). \tag{16}$$

当 $p=0$ 时，这便是 Euler 所知悉的情形.

6. Levi-Civita 的平行移动概念

在平面欧氏几何学中，当已知两点 P, P_1 时，对于 P 处的任何一个方向，我们必定可在 P_1 处作唯一的**平行方向**. 现在我们把这个概念推广到任何曲面上去.

为此，在曲面 σ 上取一点 P 及其切平面 W. 从 P 点出发的任何切线（它当然在 W 上）是由它的单位方向 $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)$ 决定的. 设 P' 为 σ 上的另外一点，W' 为 σ 在 P' 处的切平面. 当在 P 点给定单位切向量 $\boldsymbol{u}$ 时，我们考虑应该如何在 P' 点决定一个单位切向量 $\boldsymbol{u}'$ 使它与 $\boldsymbol{u}$ 形成类似平行的问题.

我们先来研究σ是可展曲面时的情形．此时σ一般说来应是一条挠曲线的切线面．设W_1, W_2, W_3, …是σ的一族邻近切平面；g_1, g_2, …分别是W_1与W_2, W_2与W_3, …的交线(图 22)．先以g_1为轴，旋转W_2使它与W_1重合；再以g_2为轴，旋转W_3使它与W_2重合，其余依此类推．结果是，σ被展开成一个平面．

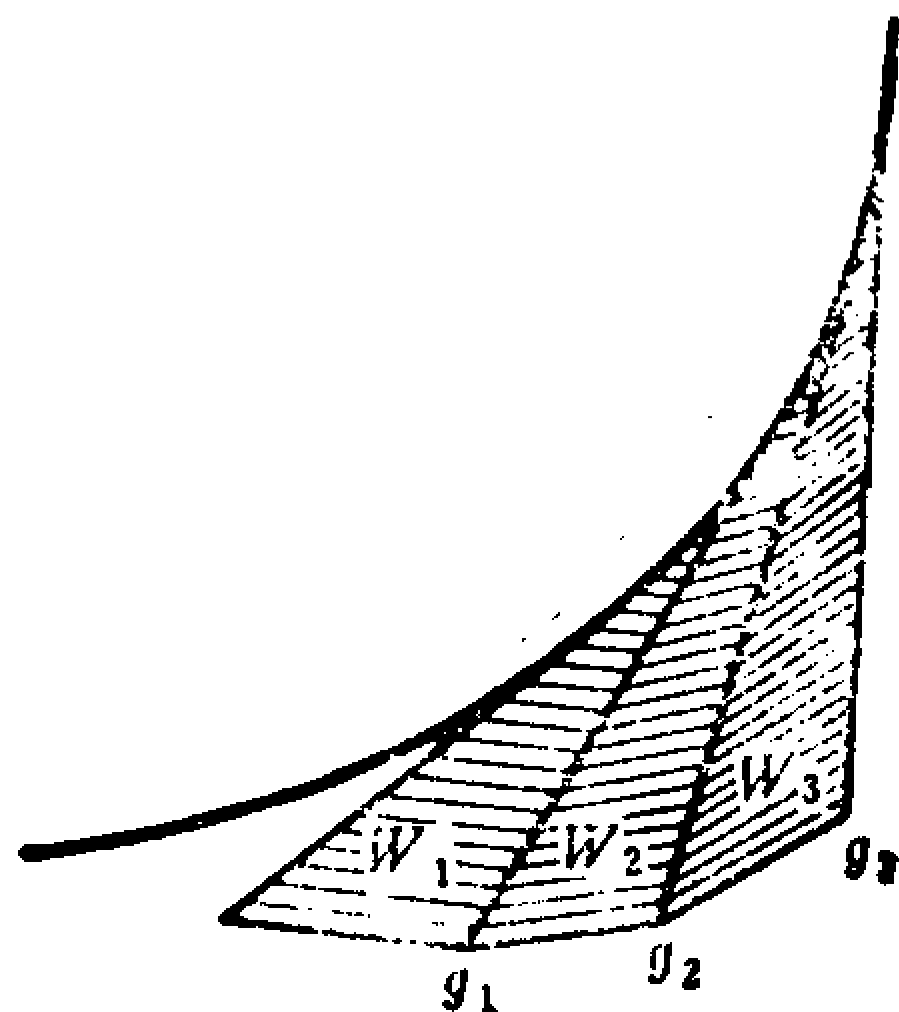


图 22

我们从σ的这个变形便可在P'处定义出单位切方向$\boldsymbol{u}'$，使它与P处的方向$\boldsymbol{u}$成一对一的对应．详细地说就是用上述方法将σ展开成平面时，方向$\boldsymbol{u}'$应变成$\boldsymbol{u}$在平面欧氏几何学意义下的**平行方向**．这就是关于可展曲面σ的平行移动的定义．

假如σ不是可展曲面(例如球面)，则此方法无效，所以有必要进行推广．设P和P'为σ上的已知两点，其间有σ上的一条曲线T相连结．这条曲线T的选择是任意的．在取定的曲线T上各点，我们作σ的切平面，它们全体构成了单参数平面族，族的包络应是一个可展曲面，记为σ_T．σ_T称为曲面σ沿曲线T的**包络可展曲面**．对于P点的切方向$\boldsymbol{u}$，我们利用上述方法，就可在P'点定义切方向$\boldsymbol{u}'$，使得$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$关于$\sigma_T$在上述意义下为平行．自然，这样定义的平行移动概念与所选的曲线T有关．因此，$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{u}'$称为沿T在 Levi-Civita 意义下的平行方向．

上述的$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{u}'$都是单位向量，但这方法也同样适用于长为R的切向量$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{R}'$，这样，就定义了P处的任何切向量$\boldsymbol{R}$沿σ上的曲线T的平行移动(图 23)．

现在取P的邻近点P'．设$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{R}'$分别落在P和P'的切平面W和W'上，而且它们在 Levi-Civita 意义下为平行．在一阶

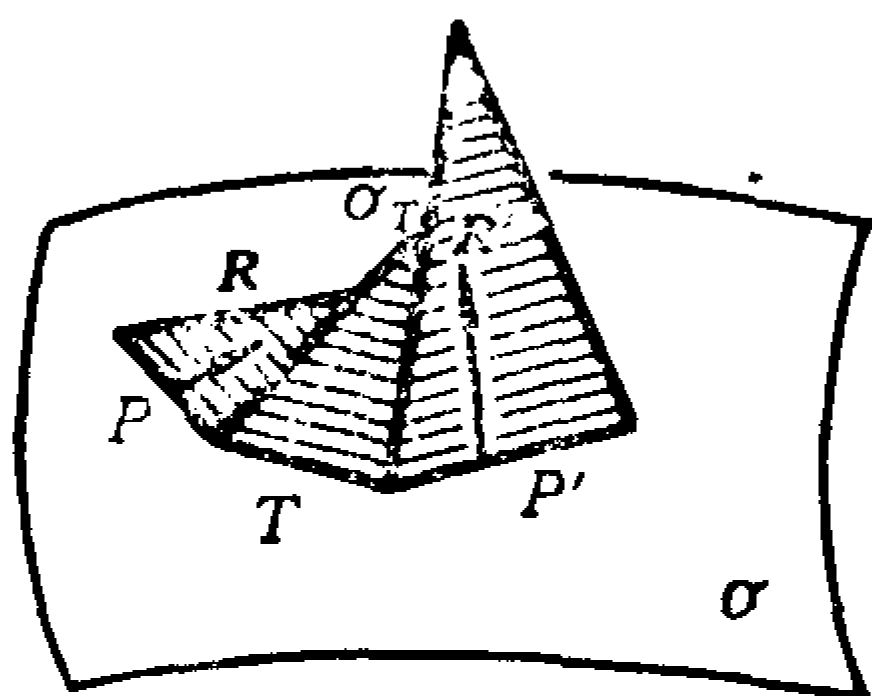


图 23

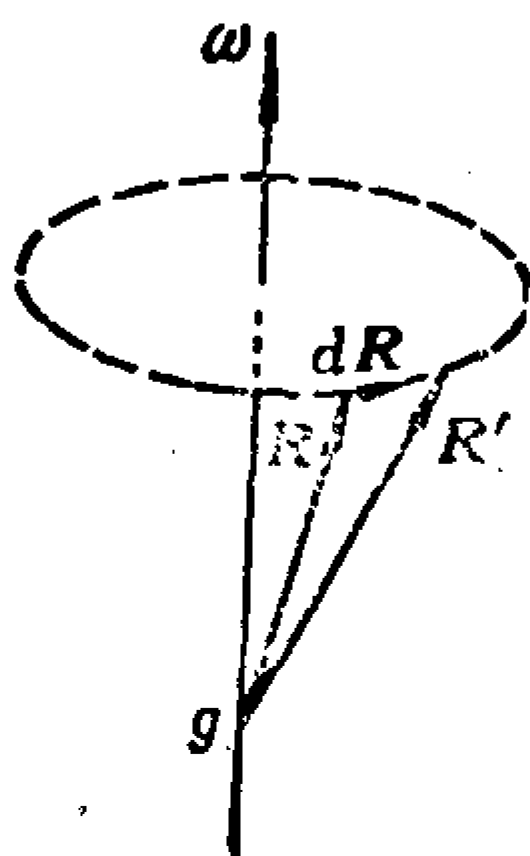


图 24

无穷小量的范围内，我们用 $d\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'-\boldsymbol{R}$ 表示向量 $\boldsymbol{R}$在平行移动以后所受到的变差. 因为 W' 在绕W与 W' 的交线 g 旋转而与 W 重合时,$\boldsymbol{R}'$ 必定成为 $\boldsymbol{R}$ 的平行方向,所以,用 g 上的向量$\boldsymbol{\omega}$表示该旋转时,根据力学的简单原理,$d\boldsymbol{R}$ 必为 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的向量积,即

$$d\boldsymbol{R}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}. \tag{1}$$

但是 g 的方向与$\overrightarrow{PP'}$ 方向相共轭，而 $\boldsymbol{R}$ 又落在切平面W上，所以 $d\boldsymbol{R}$ 必与曲面法线方向 $\boldsymbol{n}$ 平行:

$$d\boldsymbol{R}\parallel\boldsymbol{n}, \tag{2}$$

即 $d\boldsymbol{R}$ 的三个分量与 $\boldsymbol{n}$ 的三个分量成比例.

这就是无穷小平行移动的条件. 下面我们将导入一般的点坐标,借以表达向量形式的条件(2)所对应的方程.

为了方便起见,改记

$$x=x^1,y=x^2,z=x^3;u=u^1,v=u^2;$$
$$E=g_{11},F=g_{12}=g_{21},G=g_{22},$$

于是我们有

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{2}g_{ik}du^idu^k.$$

当参数值由(u^1,u^2)变为(u^1+du^1,u^2+du^2)时，设曲面的点坐

标由 x^ν 变为 $x^\nu+dx^\nu$，$(\nu=1,2,3)$. 若记

$$\lambda^i=\frac{du^i}{ds}\quad(i=1,2),$$

则我们有

$$\sum_{i,k=1}^{2}g_{ik}\lambda^i\lambda^k=1,$$

两数 λ^1,λ^2 称为**方向参数**.

如果曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上切向量 $\boldsymbol{R}$ 的长为 R，它的方向参数为 λ^1,λ^2，则两数

$$R^i=R\lambda^i\quad(i=1,2)$$

便表示 $\boldsymbol{R}$ 关于基向量 $\frac{\partial}{\partial u^1}\boldsymbol{r}$，$\frac{\partial}{\partial u^2}\boldsymbol{r}$ 分解的分量，即

$$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^i}R^i.$$

另一方面，设 $\boldsymbol{R}=(X^1,X^2,X^3)$，这里的 $X^\nu(\nu=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 在三个坐标轴 x^1,x^2,x^3 上的分量. 然而曲面 $\boldsymbol{r}=(x^1,x^2,x^3)$ 的三个分量函数 $x^\nu(\nu=1,2,3)$ 沿方向 $\boldsymbol{R}$ 满足

$$\frac{dx^\nu}{ds}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^i}\frac{du^i}{ds}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^i}\lambda^i\quad(\nu=1,2,3),$$

所以我们得到

$$X^\nu=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^i}R^i\quad(\nu=1,2,3).\tag{3}$$

现在我们回过头来讨论无穷小平行移动条件(2). 仍设 $\boldsymbol{R}$ 的分量为 $X^\nu(\nu=1,2,3)$，并设 $\overrightarrow{PP'}$ 对应的方向为 d，则条件(2)可以改写为

$$\sum_{\nu=1}^{3}dX^\nu\delta x^\nu=0,\tag{4}$$

式中 δ 表示任何切线方向. 由于

$$\delta x^{\nu}=\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}\delta u^{k},\tag{5}$$

所以我们又可进一步改写(4)为

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}d\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{j}}R^{j}\right)\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}\delta u^{k}=0.$$

如果记

$$\tau_{k}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}d\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{j}}R^{j}\right)\quad(k=1,2),\tag{6}$$

则我们有

$$\sum_{k=1}^{2}\tau_{k}\delta u^{k}=0.\tag{7}$$

因为 $\delta u^{1},\delta u^{2}$ 可取任意值, 所以向量 $\boldsymbol{R}$ 沿方向 d 的无穷小平行移动条件应当为

$$\tau_{k}=0\quad(k=1,2).\tag{8}$$

下面我们来计算 τ_{k} 的值. 根据(6)式,

$$\tau_{k}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{j}}dR^{j}+\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{j,l=1}^{2}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial u^{j}\partial u^{l}}R^{j}du^{l}.\tag{6'}$$

然而依照线素的定义应该有

$$ds^{2}=\sum_{\nu=1}^{3}(dx^{\nu})^{2}=\sum_{j,k=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{j}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}du^{j}du^{k},$$

因此成立

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{j}}=g_{kj}.$$

我们从

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial u^{j}\partial u^{l}}=\frac{\partial}{\partial u^{j}}\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{k}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{l}}\right)-\frac{\partial^{2}x^{\nu}}{\partial u^{k}\partial u^{j}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{l}},$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial u^k}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial u^j\partial u^l}=\frac{\partial}{\partial u^l}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial u^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^j}\right)-\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial u^k\partial u^l}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^j},$$

首先写出

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial u^k}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial u^j\partial u^l}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial u^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^l}\right)+\frac{\partial}{\partial u^l}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial u^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^j}\right)-\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial u^l}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^j}\right)\right],$$

由此得到

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^k}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial u^j\partial u^l}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}\right). \tag{9}$$

(9) 式右边称为第一类 Christoffel 记号，通常记作

$$\Gamma_{jl,k} \text{ 或 } [jl,k].$$

于是我们又可把(6′)改写为

$$\tau_k=\sum_{j=1}^{2}g_{kj}dR^j+\sum_{j,l=1}^{2}\Gamma_{jl,k}R^j du^l \quad (k=1,2). \tag{6″}$$

为了用另外的形式表示(8)，我们记

$$|g_{ik}|=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}$$

且

$$g^{ik}=\frac{g_{ik}\text{ 在 }|g_{ik}|\text{ 中的代数余子式}}{|g_{ik}|},$$

也就是

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{|g_{ik}|},\ g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{|g_{ik}|},\ g^{22}=\frac{g_{11}}{|g_{ik}|}.$$

用 g^{ki} 乘(6″)的两侧，并关于 $k=1,2$ 求和，则我们得到

$$\tau^i\equiv\sum_{k=1}^{2}\tau_k g^{ki}=dR^i+\sum_{j,l=1}^{2}\Gamma^i_{jl}R^j du^l \quad (i=1,2) \tag{6‴}$$

式中

$$\Gamma^i_{jl}=\sum_{k=1}^{2}g^{ki}\Gamma_{jl,k}$$

称为第二类 Christoffel 记号、Γ^i_{jl} 有时也写为 $\begin{Bmatrix} i \\ jl \end{Bmatrix}$.

总结上面的讨论我们得到向量 $\boldsymbol{R}$ 沿方向 d 的无穷小平行移动的条件

$$\tau^i=0 \quad (i=1,2),$$

也就是

$$dR^i+\sum_{j,l=1}^{2}\Gamma^i_{jl}R^j du^l=0 \quad (i=1,2). \tag{10}$$

关于平行移动的重要性质我们在后面(§25)还要详细讨论.

习　题

1. 证明 G. Frobenius 关于 Gauss 曲率的公式

$$K=-\frac{1}{4\Delta^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{\Delta}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u-F_v}{\sqrt{\Delta}}\right)\right\}.$$

这里 $\Delta=EG-F^2$.

2. 试从测地线三角形的 Gauss 定理导出下列定理：设曲面上有 n 条测地线构成一个 n 边形，且 $\angle A_1,\angle A_2,\cdots,\angle A_n$ 为它的内角，则关于这 n 边形围成的曲面区域所作的积分

$$\iint KdS=\angle A_1+\angle A_2+\cdots+\angle A_n-(n-2)\pi .$$

3. 如果两曲面沿一曲线相切，则它们沿此曲线的测地曲率必相等.

4. 证明：单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上曲线 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s), y(s), z(s))$ 的测地曲率等于

$$\frac{1}{r_g}=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''),$$

这里 $\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}''$ 等表示 $\boldsymbol{r}(s)$ 关于弧长 s 的导数.

5. 如果曲面上任何一个测地线三角形的角盈 $\varepsilon\equiv\angle A+\angle B+\angle C-\pi$

与它面积的比为定值，则该曲面的总曲率必为常值，且其逆亦真.

6. 以曲面上一点P为中心作半径为r的测地圆. 如果此测地圆的周长为L，则曲面在P点的总曲率

$$K_0=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-L}{r^3}.$$

(J. Bertrand-V. Puiseux, 1848)

7. 设上题中测地圆的面积为F，证明

$$K_0=\lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2-F}{r^4}.$$

(Diguet, 1848)

8. 在半径为R的球面上取一个小圆C，将C在其一点A的垂直切线沿C平行移动一周回到A. 设平行移动一周后的切线和原切线在A点的交角为φ，且C所围成的球表面积为S. 证明：$\varphi=S/R^2$.

9. 将两切向量沿曲面上同一条曲线作平行移动，则它们的交角保持不变.

10. 如果曲线的切线沿该曲线为平行移动，则此曲线必为测地线，且其逆亦真.

11. 设A、B为曲面上一曲线Γ的两邻近点，弧长$\widehat{AB}=\Delta s$. 如将A点的切线沿Γ平行移动到B点时，与B点的切线构成的角设为$\Delta\theta$. 证明：Γ在A的测地曲率等于

$$\frac{1}{r_g}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

12. 设C为曲面上围绕其上一点P的微小封闭曲线，而且$\int d\alpha$表示曲面上一切向量沿C平行移动一周后所产生的全部角差，则当C收缩于P点时

$$\lim\frac{\int d\alpha}{\int dS}=K(P),$$

式中$\int dS$是C所围的曲面表面积，而$K(P)$则表示曲面在P的总曲率.

13. 设两曲面沿一条曲线相切，则当一系切向量沿此曲线关于一曲面为平行移动时，关于另一曲面也为平行移动.

14*. 设C为球面上的一条简单封闭曲线，而且任何切向量沿C平行移

动一周后仍旧还原，则C必平分球面积，且其逆亦真．(Levi-Civita, 1933)

15*. 试把上题结论向某种旋转面作推广． (Sbrana, 1934)

16. 在曲面上沿微小测地线$AB=a$把微小测地线$AA'=b$平行移动至B点，得到BB'．设$A'B'=a'$，则曲面在A的总曲率K为

$$K=\lim\frac{a^2-a'^2}{S^2},$$

式中S表示平行四边形$AA'BB'$的面积．

17. 设曲面上无穷小测地线三角形ABC的三边为a, b, c，边c的对角为C，面积为S，且曲面在C的总曲率为K，则

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(C-\frac{KS}{3}\right).$$

(Darboux)

§24. 常总曲率的曲面与非欧几何学

1. Poincaré 上半平面的表示

总曲率K等于零的曲面是可展曲面，所以在它上面的几何学就是平面几何学．球面是K等于正常数曲面的一个例子．如果想得到K等于负常数，例如-1的曲面，我们当然可以取一个半径等于$i=\sqrt{-1}$的虚球面．但要构造一个负常数总曲率的实曲面，也并不困难．例如，在(z,r)平面上取一条曳物线

$$z=k\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\cos\varphi\right), r=k\sin\varphi,$$

其中k为常数，φ为参数．我们以z轴为旋转轴，作出这曲线的旋转面，则它的线素决定于第一基本量

$$E=k^2\sin^2\varphi, F=0, G=k^2\operatorname{ctg}^2\varphi,$$

从而根据§23.1得到

$$K=-\frac{1}{k^2}.$$

这样作出的曲面与平面$z=0$的交点都是奇点，也就是说，曲面

在这种点的切平面无法确定. 因而自然要问: 能否构造一个负常总曲率的实曲面, 使它处处正则? D. Hilbert 对这问题作出了解答, 就是

定理 任何负常总曲率的曲面至少有一个奇点.

证明从略. 读者可参考 W. Blaschke 著《Vorlesungen über Differentialgeometrie》的第一卷, 第三版(1930), 206页至209 页.

设一个曲面的总曲率$K=-\frac{1}{k^2}$(k 为常数), 我们可把它的线素写为

$$ds^2=du^2+k^2e^{\frac{2u}{k}}dv^2. \tag{1}$$

由于这时 $E=1, F=0$, $G=(ke^{\frac{u}{k}})^2$, $\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=\frac{1}{k}e^{\frac{u}{k}}$, 所以

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=-\frac{1}{k^2}.$$

如果我们用 ku 替换 u, 则

$$ds^2=k^2e^{2u}(e^{-2u}du^2+dv^2). \tag{2}$$

假如令

$$v=x, \quad e^{-u}=y, \tag{3}$$

则曲面上的点(u, v)就与平面的点(x, y)相对应, 而且

$$ds^2=\frac{k^2}{y^2}(dx^2+dy^2). \tag{4}$$

因为对于任何值 u, 都有 $e^{-u}>0$, 所以曲面上的点和上半平面的点相对应, 而且这个对应是保角的.

在这个对应下, 曲面上的曲线对应于上半平面的曲线. 我们来研究一下曲面上的测地线在上半平面的象究竟如何.

曲面上的测地线原来是变分问题

$$\delta\int ds=0$$

的极值线(§ 21. 1). 对于所讨论的曲面，我们有

$$s=k\int\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx. \tag{5}$$

这时，测地线的微分方程具有首次积分

$$y\sqrt{1+y'^2}=常数. \tag{6}$$

其实，一般关于积分

$$\int\mathscr{F}(x,y,y')\,dx$$

的 Euler 方程(§21. 1，公式(4))是

$$\frac{d}{dx}\mathscr{F}_{y'}-\mathscr{F}_y=0.$$

如果$\mathscr{F}_x=0$，它就可以改写为

$$\mathscr{F}_{yy'}y'+\mathscr{F}_{y'y'}y''-\mathscr{F}_y=0,$$

也就是

$$\frac{d}{dx}(\mathscr{F}-y'\mathscr{F}_{y'})=0.$$

所以我们得到首次积分

$$\mathscr{F}-y'\mathscr{F}_{y'}=常数.$$

在所讨论的问题

$$\mathscr{F}(x,y,y')=k\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y},\ \mathscr{F}_x=0,$$

于是代入后的结果便是(6). 再积分，便得到

$$(x-x_0)^2+y^2=a^2, \tag{7}$$

式中的 x_0 与 a 都是常数.

由此得知，所论曲面上测地线的象是在上半平面与 x 轴直交的半圆. 换句话说，在上半平面里按对应(3)所得的曲面对应几何学中，上面所说的半圆应该是它的直线，所以称为**拟似直线**.

其次，我们必须阐明在这种平面几何学中应该如何定义两点

间的距离. 为此先来证明下列定理:

记 $z=x+iy, i^2=-1$, 则变换

$$z^*=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ 为实数}, \alpha\delta-\beta\gamma>0) \tag{8}$$

是曲面上的等长变换,也就是

$$ds=k\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=k\frac{\sqrt{dx^{*2}+dy^{*2}}}{y^*}.$$

证明 根据(8)式,我们有

$$dz^*=(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{dz}{(\gamma z+\delta)^2},$$

$$|dz^*|=(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{|dz|}{|\gamma z+\delta|^2},$$

$$z^*=\frac{[(\alpha x+\beta)+i\alpha y][(\gamma x+\delta)-i\gamma y]}{|\gamma z+\delta|^2}$$

$$y^*=\mathrm{I}(z^*)=\frac{\alpha y(\gamma x+\delta)-\gamma y(\alpha x+\beta)}{|\gamma z+\delta|^2}=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)y}{|\gamma z+\delta|^2},$$

所以成立

$$\frac{|dz^*|}{y^*}=\frac{|dz|}{y}.$$

证毕.

合并变换(8)及变换

$$x^*=-x, y^*=y, \tag{9}$$

则其全体组成曲面的所有等长变换. 换句话说,利用(8)及(9),可将上半平面的任何一个线素化为与之等长的另一线素

实际上,设 $z_0=x_0+iy_0(y_0>0)$ 是上半平面中的任何一点. 先作变换

$$z^*=\frac{1}{y_0}(z-x_0), \tag{10}$$

它把 z_0 移到 i 点,并且(10)具有形式(8),对应的 $\alpha=1$, $\beta=-x_0$, $\gamma=0, \delta=y_0$ 都是实数, $\alpha\delta-\beta\gamma=y_0>0$. 这样一来,对于上半平面

的两等长线素，只要施行形式(8)的变换，总可以使两端点合而为一(即点 i).

其次，对于同端点 $z=i$ 两等长的线素，适当施行变换(9)于其中的一个线素后，常可假定由第一线素至第二线素的交角 ω 满足关系 $0\leqslant\omega<\pi$. 于是对第一线素作变换

$$z^*=\frac{z+\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1-z\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}. \tag{11}$$

由于这时 $\alpha=1, \beta=\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \gamma=-\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \delta=1$ 都是实数，而且 $\alpha\delta-\beta\gamma=1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}>0$，所以(11) 也是属于形式(8)的变换. 在变换(11)之下，点 i 不动：

$$z^*=\frac{i+\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}=i,$$

并且在 i 点，$dz^*=e^{i\omega}dz$，所以第一线素经过变换(11)之后，就合于第二线素.

由此我们知道，上半平面的两个等长的线素经过形式(8)及(9)的变换后，必可合而为一. 这件事就说明了这两种变换组成上半平面里的所有等长变换.

设曲面上两点的象是 z_1, z_2 $(y_k>0, k=1,2)$，则曲面上连接这两点的测地线弧长应当等于

$$s_{12}=k\int_{z_1}^{z_2}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}, \tag{12}$$

式中的积分是沿 z_1, z_2 两点间的测地线进行的.

然而测地线在上半平面的象是个半圆，它经过点 z_1, z_2，并与 x 轴直交(图 25). 设此半圆与 x 轴的左交点为 z_0，右交点为 z_∞，于

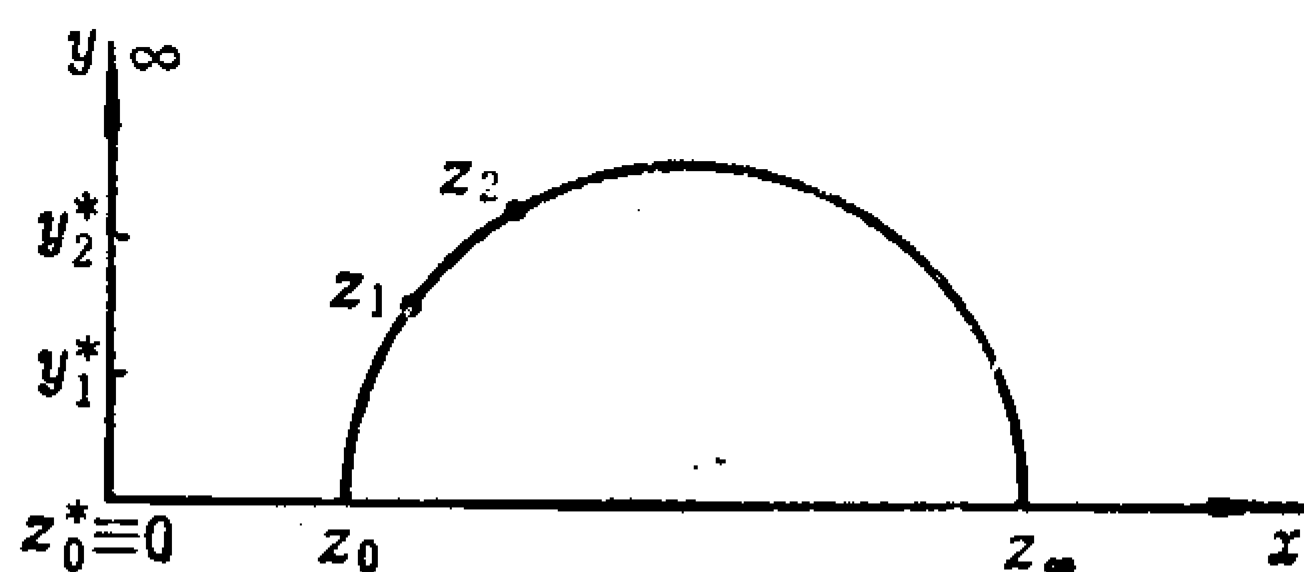


图 25

是 z_0, z_∞ 都是实数，且 $z_\infty - z_0 > 0$，所以变换

$$z^* = \frac{z_0 - z}{z - z_\infty} \tag{13}$$

具有形式(8). 弧长(5)在(13)之下是不变的. 上述半圆经过这变换之后成为正 y 轴，所以

$$s_{12} = k\int_{y_1^*}^{y_2^*} \frac{dy}{y} = k\ln\frac{y_2^*}{y_1^*}, \tag{14}$$

也就是

$$s_{12} = k\ln(z_1^* z_2^*, z_0^* z_\infty^*), \tag{15}$$

式中( )表示所含四点的交比. 由于圆上四点的交比对于一次变换来说是不变式，所以我们得到两点 z_1, z_2 间的距离是

$$s_{12} = k\ln(z_1 z_2, z_0 z_\infty). \tag{16}$$

综上所述，在对应于所论曲面的上半平面几何学中，上半平面上任何两点 z_1, z_2 间的距离应由公式(16)所决定. 这个距离称为**拟似距离**.

2. 非欧几何学

上面说的上半平面的几何学非常有趣. 因为它的构造原来是负常总曲率曲面，亦即拟球的一种表示，所以必与欧氏几何学大相迳庭. 例如，三条拟似直线如构成一个三角形，则其内角和小于 π. 这是因为上半平面的点(x, y)与曲面上的点成保角对应，而根

据 Gauss 定理（§23.3），拟球上测地线三角形的内角和确实小于 π.

另外，根据拟似距离的定义(16)容易知道，上半平面中任何一点到 x 轴上任何一点之间的拟似距离为无限大. 所以 x 轴具备仿射平面无限远直线的性质.

在这个几何学中，除平行线公理外，所有欧氏几何学的公理都成立. 例如，两点决定一直线，而且仅决定一条直线，等等. 至于平行线公理，则应改为下列形式:

从一条拟似直线 p 外的一点 P，可作 p 的两条平行拟似直线。

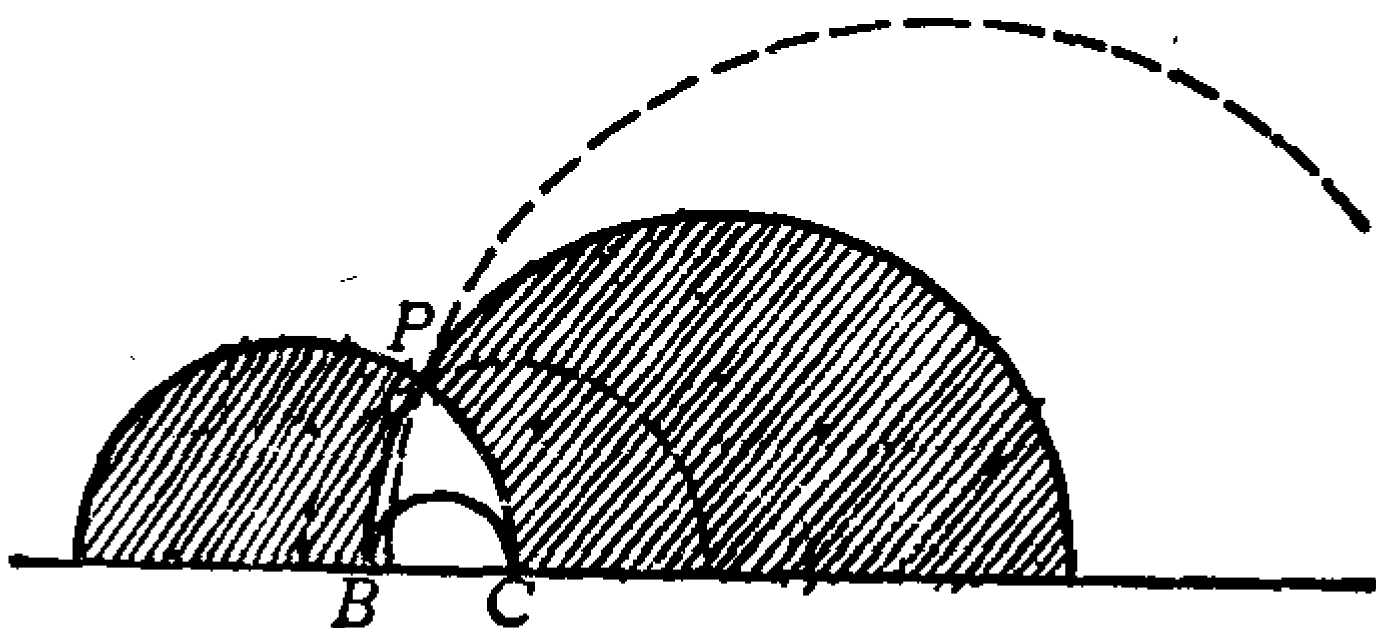


图 26

从上图我们容易看出，经过 P 点可作无限条拟似直线，使它们与给定的拟似直线既不相交，又不平行. 十九世纪初，青年人 Bolyai, Лобачевский，还有 Gauss 独立地建立了**非欧几何学**，它的内容与我们所讨论的上半平面几何学完全相同. 这门几何学也可看为非欧几何学在欧氏平面上的一种表示，即 Poincaré 表示.

综合以上的事实，我们立即得出下列的结论：在拟球上，即在总曲率为 $-\frac{1}{k^2}$ 的曲面上，将测地线看为直线、从而建成的几何学，其结果与 Bolyai 及 Лобачевский 的非欧几何学有同一性质. 这就是 Beltrami 在 1868 年所发现的解释.

我们也可以对上述的 Poincaré 表示施行反演的方法来推出非欧几何学在欧氏平面上的表示. 在半径为 1 的定圆内部，Γ 与它

直交的圆弧，称为拟似直线．定圆的直径是直交圆弧的极限情形，也是拟似直线．经过圆内的任何两点P，Q可作一条拟似直线，而且仅能作一条．这条拟似直线与定圆直交于两个端点X，Y．我们用(PQ,XY)表示P,Q,X,Y的交比，并把

$$k\ln(PQ,XY) \tag{1}$$

定义为P、Q两点间的拟似距离．至于两拟似直线间的交角，则完全依照欧氏几何学的同一方法进行定义．

凡使定圆变到本身且使定圆内部的点互相变更的圆变换，一定能使圆内的任何一点移到圆内的任何一点，而且不改变拟似距离及角度，所以把定圆的中心O看为任意点，这对我们的讨论来说并不失一般性．现设一条任意的拟似直线的两个端点为X，Y，则这两点就相当于无限远点，而OX，OY两连线便是经过O且与拟似直线XY平行的两条拟似直线．

定圆在两点X，Y的切线相交于点M，设连线MO与拟似直线XY相交于点N，并把它与定圆的两个交点中与M较近的一点记为P，较远的记为Q(图 27)，则

$$\overline{MX}^2+\overline{OX}^2=(\overline{NO}+\overline{MN})^2$$
$$=\overline{MN}^2+\overline{NO}^2+2\overline{MN}\cdot\overline{NO},$$

所以

$$\overline{OX}^2=\overline{NO}^2+2\overline{MN}\cdot\overline{NO}.$$

然而

$$\overline{OX}=1,\overline{MX}=\operatorname{tg}\angle XOM$$

如果记$\alpha=\angle XOM$，从此便有

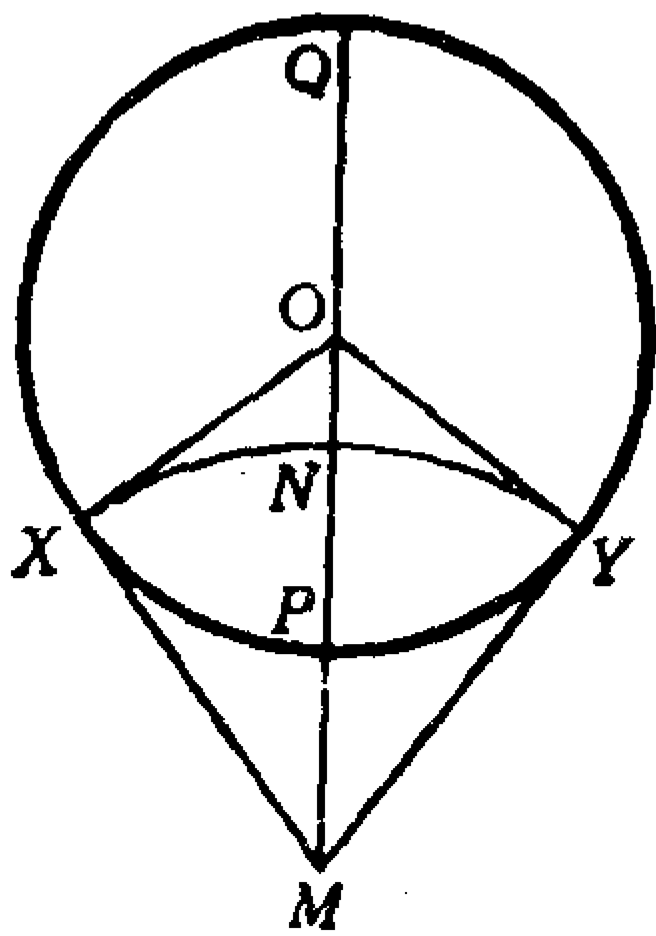


图　27

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\overline{ON}^2}{2\overline{ON}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{ON}}-\overline{ON}\right).$$

现在我们假定O与N两点间的拟似距离为δ：

$$\delta = k\ln(ON, PQ) = k\ln\frac{1+\overline{ON}}{1-\overline{ON}},$$

也就是

$$\frac{1+\overline{ON}}{1-\overline{ON}} = e^{\frac{\delta}{k}}.$$

由此解得

$$\overline{ON} = \frac{e^{\frac{\delta}{k}}-1}{e^{\frac{\delta}{k}}+1},$$

所以我们有

$$\overline{ON} = \operatorname{th}\frac{\delta}{2k}, \tag{2}$$

并且

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\overline{ON}^{-1}-\overline{ON}} = \frac{2}{\operatorname{cth}\frac{\delta}{2k}-\operatorname{th}\frac{\delta}{2k}} = \operatorname{sh}\frac{\delta}{k}.$$

从点 O 所作的拟似直线 XY 的垂直拟似直线就是 ON. $\angle XON$ 或 $\angle NOY$ 称为对应于两点 O、N 间拟似距离 δ 的**平行角**；如果用 $\pi(\delta)$ 表示这个角，则

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\pi(\delta) = \operatorname{sh}\frac{\delta}{k},$$

于是我们就得到下列的关系式：

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi(\delta) = e^{\frac{\delta}{k}}. \tag{3}$$

这就是非欧几何学中关于平行角的Лобачевский定理.

如果我们想导出非欧几何学的三角公式，就必须考察由三条拟似直线所构成的三角形 ABC. 如前所述，我们可以特别地选取定圆的中心为 C，也不失一般性.

设 A', B' 为两点 A，B 关于定圆的反演点(图 28)，则 A', B' 必

在拟似直线 AB 的圆外延长部分上，这件事可由如下的事实推出：经过两反演对应点的任何圆必定与反演圆直交．设 M 为两直线 AB'，$A'B$ 的交点，于是

$$\overline{CA}\cdot\overline{CA'}=1,\ \overline{CB}\cdot\overline{CB'}=1,$$

且

$$\overline{AA'}:\overline{BB'}=\overline{MA'}:\overline{MB'}=\sin A:\sin B.$$

式中的$\angle A$ 与$\angle B$ 分别为拟似直线三角形 ABC 的两内角．

现在设$\overline{CA}$，$\overline{CB}$ 的拟似距离为 b，a，则

$$\overline{CA}=\operatorname{th}\frac{b}{2k},\ \overline{CB}=\operatorname{th}\frac{a}{2k},$$

所以

$$\overline{AA'}=\frac{1}{\overline{CA}}-\overline{CA}=\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{b}{k}},$$

$$\overline{BB'}=\frac{1}{\overline{CB}}-\overline{CB}=\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{a}{k}},$$

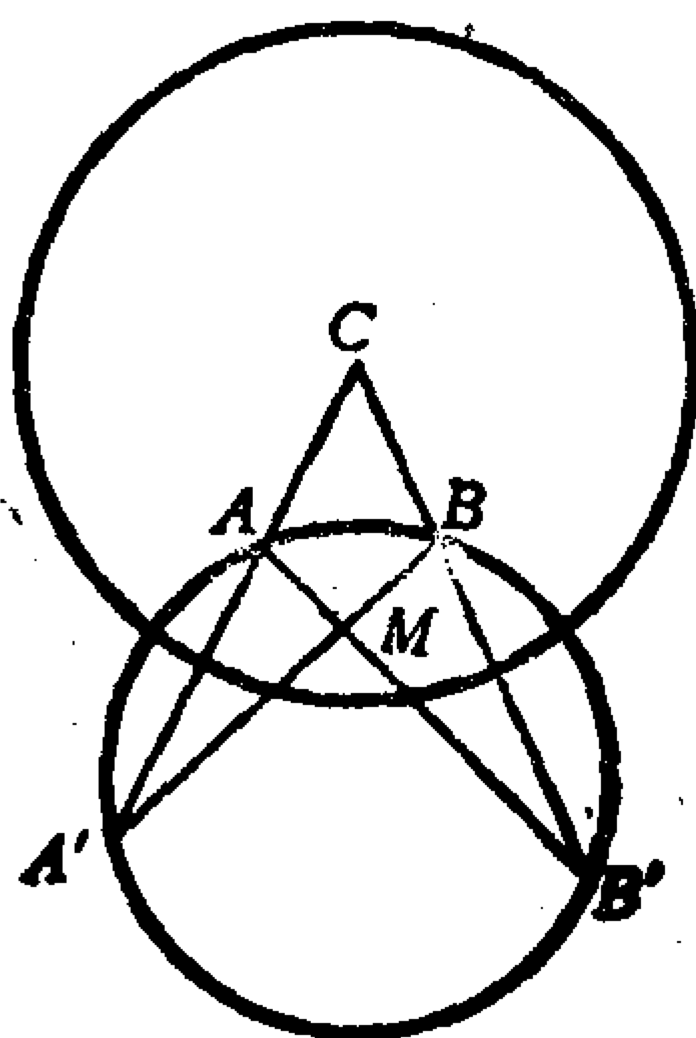


图 28

于是

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B}.$$

这样我们就得到拟似直线三角形的边与角之间应该成立的关系式

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin B}=\frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin C}. \tag{4}$$

又因为

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}=\frac{\sin\angle A'AB'}{\sin\angle CB'A},\quad \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}=\frac{\sin\angle BB'A'}{\sin\angle B'A'A},$$

故
$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CB}}=\frac{\sin\angle A'AB'\cdot\sin\angle B'A'A}{\sin\angle CB'A\cdot\sin\angle BB'A'}=\mathrm{cth}^2\frac{a}{2k}.$$
又因为
$$\angle A+\angle B+\angle C=\pi-2\angle CB'A,$$
$$\angle A-\angle B+\angle C=\pi-2\angle B'A'A,$$
$$-\angle A+\angle B+\angle C=\pi-2\angle BB'A',$$
$$\angle A+\angle B-\angle C=\pi-2\angle A'AB',$$
所以
$$\mathrm{cth}^2\frac{a}{2k}=\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{-A+B+C}{2}}$$
$$=\frac{\cos A+\cos(B-C)}{\cos A+\cos(B+C)},$$
也就是
$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}=\mathrm{ch}^2\frac{a}{2k}+\mathrm{sh}^2\frac{a}{2k}=\mathrm{ch}\frac{a}{k},$$
即
$$\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C\,\mathrm{ch}\frac{a}{k}. \tag{5}$$
用同样的方法我们可得到
$$\mathrm{ch}\frac{a}{k}=\mathrm{ch}\frac{b}{k}\mathrm{ch}\frac{c}{k}-\mathrm{sh}\frac{b}{k}\mathrm{sh}\frac{c}{k}\cos A. \tag{6}$$
这些都是非欧几何学的三角公式.

习 题

1. 如果曲面上存在两系相交于定角的测地线，则此曲面必为可展曲面($K=0$).

(Liouville)

2. 设 α_i, a_i, K_i 及 F 分别为一个微小测地线三角形的内角、对边、顶点的总曲率及面积，则比值

$$\frac{a_i-\frac{F}{12}\{K_i+K_1+K_2+K_3\}}{\sin a_i}$$

与 $i(=1,2,3)$ 的值无关. (Gauss)

3. 设正常数曲率的曲面线素为

$$ds^2=du^2+R^2\sin^2\frac{u}{R}dv^2,$$

并且一个测地线三角形的三边及三顶角分别为 a, b, c 及 $\angle A, \angle B, \angle C$. 证明下列三角公式:

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C},$$

$$\cos\frac{c}{R}=\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}+\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C,$$

$$\sin\frac{c}{R}\cos B=\sin\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}-\cos\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C,$$

并由此导出

$$\cos(\pi-A)=\cos B\cos C-\sin B\sin C\cos\frac{a}{R}.$$

4*. 在经过曲面上正常点 P 的一条渐近曲线上任取两个邻近点 R, S. 过 P, R, S 点沿其他的三个渐近方向作三条切线. 当 $R, S\to P$ 时, 这三条切线所决定的织面的极限,称为 **Lie织面**. 证明:

1° Lie 织面与所取的渐近曲线无关. 换句话说,如果我们取的是过 P 的另一条渐近曲线并进行同样的作图,则所得的织面仍旧是同一个 Lie 织面.

2° 如果曲面在 P 的法线通过同一点 Lie 织面的中心, 则曲面的总曲率 K 必为常数,且其逆亦真.

5. 如果一个旋转面是拟球,即 $K=-\frac{1}{k^2}$ 的曲面,则它的子午线必为曳物线. (提示: 设一个旋转面的子午线在一点 P 的曲率为 $\frac{1}{r}$, 且过 P 的曲面法线与轴相交于 N, 记 $PN=n$, 则 $K=\frac{1}{rn}$.)

§ 25. 绝对微分学

1. 简史

设 $g_{ik}=g_{ki}$ 是 n 个变数 $u^1, u^2, \cdots, u^n$ 的函数($i,k=1, 2, \cdots, n$)，则

$$\sum_{i,k}^{n} g_{ik} du^i du^k$$

称为**二次微分形式**. 研究有关这形式变换理论的学科称为**绝对微分学**. 最早研究这理论的是 Christoffel(1869). 后来继续研究的是意大利学者 G. Ricci-Curbastro 和他的学生T. Levi-Civita. 他们两人曾接受 F. Klein 的邀请，把他们历年研究的内容在数学杂志《Mathematische Annalen》的第五十四卷 (1901) 上作了综合报告. 但是由于内容枯燥，计算烦杂，结果在一段时间内并没有引起世界上其他学者的兴趣. 后来，A. Einstein(1915)在写广义相对论时得到瑞士学者 Grossmann 的帮助，用的竟然就是默默无闻地沉寂了数十年的绝对微分方法. Einstein 在他的论文 Zur Allgemeinen Relativitätstheorie(发表于 Sitzungsber. der Preuss. Akad. Wiss.，1915)中曾说过："今天才刚刚看到 Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci 等人所建立的一般微分学方法的真正胜利". 当时人们并不体会这话的深刻含意，如今它对于微分几何学任何部分内容的叙述已经成了不可缺的工具了.

绝对微分学又称为**张量计算法**或 Ricci 微分学，用以纪念 Ricci 的功绩. Einstein 为了省略求和符号 Σ 作出如下规定：凡是表达式中的上下指标相同时，就意味着关于这个指标从 1 到 n 求和. 于是上述的二次微分形式按这种规定就可写为

$$g_{ik} du^i du^k,$$

根据规定，式中的指标 i 和 k 都是从 1 到 n 的求和指标. 指标 i

或 k 仅仅用来表示求和，并没有其他特殊含意，通称为**哑数**. 我们尽可以把它们更改用其他字母代替，例如把 i,k 改写为 r,s 等等，这时上列的二次微分形式也就有形式

$$g_{ik}du^i du^k = g_{rs}du^r du^s$$

等等. 应当注意的是，在同一式中不能用同一个哑数表示多于一次的求和，免得引起计算混杂，以致求和符号省略的规定丧失意义. 如果有必要将一个总和中的某一项，例如上述二次形式中 $r=R, s=S$ 的一项取出，这时必须声明

$$g_{RS}du^R du^S$$

关于 R,S 不求和. 自然我们也可规定：当指标用大写字母时，即使有上下指标相同，也不表示求和. 下文中，对此不再作说明.

特别地，当 $n=2, u^1=u, u^2=v; g_{11}=E, g_{12}=g_{21}=F, g_{22}=G$ 时，$g_{ik}du^i du^k = Edu^2+2F\,du\,dv+Gdv^2$ 表示一个曲面的线素.

2. 张量

设 $u^1, u^2, \cdots, u^n$ 为 n 个独立变数. 为了方便起见，把这 n 个数组成的数组看作 n 维空间 X_n 中的一点，并把这 n 个数称为这点的**曲线坐标**，或简称为**坐标**，记为 (u^i). 括号内的 i 并非只表示第 i 个坐标，而是表示由 n 个数组成的坐标 $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$. 假如点的坐标 (u^i) 受到一般的坐标变换

$$\begin{cases} \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2, \cdots, u^n), \\ \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2, \cdots, u^n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{u}^n = \bar{u}^n(u^1, u^2, \cdots, u^n), \end{cases}$$

或简单地记为

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, \cdots, u^n) \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

则 $(\bar{u}^i)$ 称为同一点的**新坐标**或**变后坐标**，而称原来的 (u^i) 为**旧坐**

标或变前坐标.

如果我们希望保持新坐标的独立性，常要求变换(1)的函数行列式

$$J=\frac{\partial(\bar{u}^1,\bar{u}^2,\cdots,\bar{u}^n)}{\partial(u^1,u^2,\cdots,u^n)}\neq 0. \tag{2}$$

以下如无特殊声明，总是假定(2)式成立.

当坐标(u^i)经变换(1)而化成$(\bar{u}^i)$时，

$$d\bar{u}^i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^k}du^k, \tag{3}$$

省略和号后便是

$$d\bar{u}^i=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^k}du^k, \tag{3'}$$

也就是说，微分(du^i)应经受线性变换(3′)，线性变换的系数行列式为 J.

设$\{V^1,V^2,\cdots,V^n\}$为任何一组数，而且当坐标(u^i)经受一般变换(1)时，它与$\{du^i\}$经受同样的线性变换，即

$$\bar{V}^i=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^k}V^k\quad(i=1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

式中的 k 仍然是哑数. 这组$\{V^i\}$称为**反变向量**或**一阶反变张量**的分量. 今后均用上指标来记它的分量.

设$\{W_1,W_2,\cdots,W_n\}$为任何一组数，且满足下列条件：对于任何的反变向量 V^i，

$$\sum_{i=1}^{n}W_iV^i=W_iV^i$$

是在任何坐标变换下的不变量，则$\{W_i\}$称为**共变向量**或**一阶共变张量**的分量. 今后均用下指标来记它的分量.

根据定义，经坐标变换(1)之后

$$\overline{W}_i\overline{V}^i=\overline{W}_i\frac{\partial\overline{u}^i}{\partial u^k}V^k=W_kV^k$$

对任何反变向量$\{V^k\}$成立，所以

$$W_k=\frac{\partial\overline{u}^i}{\partial u^k}\overline{W}_i\quad(k=1,2,\cdots,n).\tag{5}$$

这就是共变向量的分量在坐标变换下的变换式.

例如，$\{du^i\}$是一个反变向量的分量. 又如，取(u^i)的任何一个可微函数$F(u^1,u^2,\cdots,u^n)$，则它的n个偏导数全体$\left\{\frac{\partial F}{\partial u^i}\right\}$便构成一个共变向量，这是因为

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u^i}du^i=\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{u}^i}d\overline{u}^i.$$

下面我们再来举一个例子.

设$A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}$ $(i,k,l=1,2,\cdots,n)$是n^3个函数，而且对任何向量$\{P^i\}$，$\{Q^k\}$，$\{R_l\}$及任何坐标变换，

$$A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}P^iQ^kR_l$$

是不变式，则$A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}$称为一个三阶张量的分量，而且关于$i$及$k$为共变，关于$l$为反变

这个张量的变换规律并不难求，我们叙述如下.

设$\overline{A}_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}$，$\overline{P}^i$，$\overline{Q}^k$，$\overline{R}^l$分别是$A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}$，$P^i$，$Q^k$，$R_l$的变后分量，则

$$\overline{A}_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}\overline{P}^r\overline{Q}^s\overline{R}_t=A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}P^iQ^kR_l.$$

然而根据(4)及(5)式，

$$\overline{P}^r=P^i\frac{\partial\overline{u}^r}{\partial u^i},\qquad\overline{Q}^s=Q^k\frac{\partial\overline{u}^s}{\partial u^k},\qquad R_l=\overline{R}_t\frac{\partial\overline{u}^t}{\partial u^l},$$

所以对所有向量P^i，Q^k，$\overline{R}_t$必成立

$$\overline{A}_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}\frac{\partial\overline{u}^r}{\partial u^i}\frac{\partial\overline{u}^s}{\partial u^k}P^iQ^k\overline{R}_t=A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}\frac{\partial\overline{u}^t}{\partial u^l}P^iQ^k\overline{R}_t.$$

于是所求的变换式是

$$\bar{A}_{s\,r}^{\cdot\,\cdot\,t}\frac{\partial\bar{u}^r}{\partial u^i}\frac{\partial\bar{u}^s}{\partial u^k}=A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}\frac{\partial\bar{u}^t}{\partial u^l}.\tag{6}$$

为了整齐起见，我们可把(6)改写为另一种形式.

先关于 $\bar{u}^r$ 微分(1)的两侧，

$$\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{u}^r}=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^k}\cdot\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^r},\tag{7}$$

左端的值根据 r 与 i 的相同与否分别为 1 或 0. 如果我们引入下列的 Kronecker 记号 δ_r^i：

$$\delta_r^i=\begin{cases}1, & i=r;\\ 0, & i\neq r,\end{cases}$$

(7)式可改写为

$$\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^r}=\delta_r^i.\tag{7'}$$

这时由(6)式我们得到

$$\begin{aligned}A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}\frac{\partial\bar{u}^t}{\partial u^l}\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^p}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^q}&=\bar{A}_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}\frac{\partial\bar{u}^r}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^p}\frac{\partial\bar{u}^s}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^q}\\&=\bar{A}_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}\delta_p^r\delta_q^s=\bar{A}_{p\,q}^{\cdot\,\cdot\,t},\end{aligned}$$

也就是

$$\bar{A}_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}=A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^r}\frac{\partial u^k}{\partial\bar{u}^s}\frac{\partial\bar{u}^t}{\partial u^l}.\tag{8}$$

一般的 m 阶张量的定义及其变换规律，可仿照上述 3 阶张量进行类推.

为了以后要用，下面我们列举有关张量的一些定理.

I. **加法** 两个同类型张量的和也是一个张量，而且属于同一类型. 例如，

$$A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}+B_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}=C_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}.\tag{9}$$

其实，根据 $A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}$ 与 $B_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}$ 都是关于 i,k 为共变，关于 l 为反变的三阶张量这一假定，我们知道：对于任何的向量 P^i,Q^k，R_l 及任

何变换，

$$A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}P^iQ^kR_l, \qquad B_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}P^iQ^kR_l$$

都是不变量，于是它们的和

$$(A_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}+B_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l})P^iQ^kR_l=C_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}P^iQ^kR_l$$

也是不变量，即 $C_{i\,k}^{\cdot\,\cdot\,l}$ 为同类型的张量.

II. **乘法** 已知任何两个向量或张量时，将第一个张量的分量与第二个张量的分量相乘，其全体就构成一个新的张量．例如，

$$A_{ik}\cdot B_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}=C_{i\,k\,r\,s}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,t}. \tag{10}$$

因为对任何向量 P^i, Q^k, U^r, V^s, W_t 以及任何的坐标变换，

$$A_{ik}P^iQ^k, \qquad B_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}U^rV^sW_t$$

都是不变量，所以它们的乘积

$$A_{ik}P^iQ^k\cdot B_{r\,s}^{\cdot\,\cdot\,t}U^rV^sW_t=C_{i\,k\,r\,s}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,t}P^iQ^kU^rV^sW_t$$

自然也是不变量.

III. **缩短** 对一个阶数不小于 2 且具有上下指标的已知的张量，将它的一个上指标与一个下指标用同一个字母表示，并按规定关于这指标从 1 到 n 求和，这样我们就得到一个新张量，它的阶数比原来的少 2．

例如，从 $C_{i\,k\,r\,s}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,t}$ 出发，我们可得

$$C_{i\,k\,r\,s}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,s}=C_{ikr}. \tag{11}$$

证明 从任何阶数不少于 2 的已知张量出发，总可作一个二阶张量 $A_{s}^{\cdot\,t}$ 与之对应．例如，由 $C_{i\,k\,r\,s}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,t}$ 我们可以作

$$A_{s}^{\cdot\,t}=C_{i\,k\,r\,s}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,t}P^iQ^kR^r.$$

如果能证明 $A_{s}^{\cdot\,s}$ 是不变量，则

$$C_{i\,k\,r\,s}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,s}P^iQ^kR^r$$

对于任何向量 P^i, Q^k, R^r 并在任何坐标变换下均为不变量，从而可以断定(11)式为张量.

为达到这个目的，取两个张量 $A_{s}^{\cdot\,t}$ 及 $B_{\cdot\,t}^{s}$，并作积

$$A_{s}^{\cdot t}B^{s}_{\cdot t}$$

因为在坐标变换下 $B^{s}_{\cdot t}$ 与P^sQ_t 经受着同一个变换， 所以 $A_{s}^{\cdot t}B^{s}_{\cdot t}$ 与 $A_{s}^{\cdot t}P^sQ_t$ 都是不变式.

Kronecker 记号 δ_t^s 是个张量，这是由于

$$\delta_t^s P_s Q^t = P_s Q^s$$

为不变量. 如果我们用 δ_t^s 替换 $B^{s}_{\cdot t}$，就能知道

$$A_{s}^{\cdot t}\delta_t^s = A_{s}^{\cdot s}$$

是不变量，这便是想要证明的事实.

3. 测地线的微分方程

上段的内容纯粹是张量的代数学. 为了能研究微分理论，我们在空间 X_n 中导入一个二阶共变张量 g_{ik}， 这里的 g_{ik} 皆为 u^1, $u^2, \cdots, u^n$ 的函数，并假定 g_{ik} 是对称的，即 $g_{ik}=g_{ki}$. 当由 g_{ik} 所组成的矩阵是正定时，我们定义空间两邻近点(u^i)与(u^i+du^i)之间的距离平方为

$$ds^2 = g_{ik}du^i du^k, \tag{1}$$

式中，假定 g_{ik} 所成的行列式 g 不等于零，即

$$g \equiv |g_{ik}| \neq 0. \tag{2}$$

这时所讨论的空间具备了一个确定的**测度或度规**，我们称它为**黎曼空间**，以后记作 R_n.

对任何一个反变向量 V^i，定义

$$V_i = g_{ik}V^k \tag{3}$$

为**张量$\{V^i\}$的共变坐标(或分量)**. 从假设(2)与(3)我们可得到

$$V^i = g^{ik}V_k, \tag{4}$$

式中的 $g^{ik}=g^{ki}$ 满足下列关系:

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j. \tag{5}$$

设 $u^i(t)$ 为 R_n 中一条曲线的参数表示，则它的弧长应当是

$$s=\int W\,dt, \qquad W=\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}, \qquad \dot{u}^i=\frac{du^i}{dt}. \tag{6}$$

为了决定曲线弧长的第一变分，给 u^i 一个小扰动

$$\bar{u}^i=u^i+\varepsilon U^i+\varepsilon^2(\cdots),$$

式中

$$U^i=\left[\frac{\partial\bar{u}^i(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \tag{7}$$

是任取的一个反变向量(**变动张量**)．于是所求的第一变分是

$$\delta s=\left[\frac{ds}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\int\left(\frac{\partial W}{\partial u^i}U^i+\frac{\partial W}{\partial\dot{u}^i}\dot{U}^i\right)dt.$$

假定所有的扰动曲线 $\bar{u}^i(t,\varepsilon)$ 与原曲线 $u^i(t)$ 具相同的起终点，从而 U^i 在各端点取零值．经过对上式右边第二项的部分积分，我们得到

$$\delta s=\int\left(\frac{\partial W}{\partial u^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\dot{u}^i}\right)U^i dt. \tag{8}$$

由于 U^i 是任意的，并且 δs 与参数 (u^i) 的选择无关，所以我们知道

$$V_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\dot{u}^i}-\frac{\partial W}{\partial u^i} \tag{9}$$

是共变向量，称为 Euler **向量**．

以下记

$$L=\frac{1}{2}g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k=\frac{1}{2}W^2, \tag{10}$$

并把(9)改写为

$$V_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{W}\frac{\partial L}{\partial\dot{u}^i}\right)-\frac{1}{W}\frac{\partial L}{\partial u^i}.$$

如果采用曲线的弧长 s 作为参数 t，则 $W=1$，于是

$$V_i=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{u}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial u^i}.$$

根据(10)式容易求得

$$\frac{\partial L}{\partial u^r}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r}\dot{u}^i\dot{u}^k,\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^r}=g_{ri}\dot{u}^i,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^r}\right)=g_{ri}\ddot{u}^i+\frac{\partial g_{ri}}{\partial u^k}\dot{u}^i\dot{u}^k,$$

于是

$$\begin{aligned}V_r&=g_{ri}\ddot{u}^i+\frac{\partial g_{ri}}{\partial u^k}\dot{u}^i\dot{u}^k-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r}\dot{u}^i\dot{u}^k\\&=g_{ri}\ddot{u}^i+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{rk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r}\right)\dot{u}^i\dot{u}^k.\end{aligned}\tag{11}$$

如果导入简略记号

$$\Gamma_{ik,r}=\Gamma_{ki,r}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ri}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{rk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r}\right),\tag{12}$$

便可改写(11)为

$$V_r=g_{ri}\ddot{u}^i+\Gamma_{ik,r}\dot{u}^i\dot{u}^k.\tag{13}$$

并且利用 g^{rl} 把 V_r 的指标升高,使成为 $V^l=g^{rl}V_r$,结果是

$$V^l=\ddot{u}^l+\Gamma^l_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k,\tag{14}$$

式中

$$\Gamma^l_{ik}=\Gamma^l_{ki}=g^{rl}\Gamma_{ik,r}.\tag{15}$$

所讨论的变分问题 $\delta s=0$ 的微分方程是

$$V_r=0\quad 或\quad V^l=0,$$

即

$$\ddot{u}^l=-\Gamma^l_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k.\tag{16}$$

我们称满足这方程的极值曲线为黎曼空间 R_n 的**测地线**.

必须指出,$\Gamma_{ik,r}$ 与 Γ^l_{ik} 都不是张量,它们就是我们已在 § 23.6 中介绍过的第一类和第二类 Christoffel 记号,有时也把它们记为

$$\Gamma_{ik,r}=[ik,r],\qquad \Gamma^l_{ik}=\begin{Bmatrix}l\\ik\end{Bmatrix}.$$

注意：如果用 g^{ik} 来提高一个张量 T_{ik} 的某一个下指标时，所得的两个张量 $T_i{}^{\cdot k}$ 与 $T^k{}_{\cdot i}$ 是不同的，

$$T_i{}^{\cdot k}=g^{rk}T_{ir},$$

$$T^k{}_{\cdot i}=g^{rk}T_{ri}.$$

只有当 $T_{ik}=T_{ki}$ 时才有 $T_i{}^{\cdot k}=T^k{}_{\cdot i}$，也只有在这时把它们都写成 T^k_i，才不至于产生混淆。我们之所以在指标的上下加点，就是为了在一般情形下避免产生混淆。对于一般的高阶张量情况更是如此。

4. Levi-Civita 的平行移动

共变微分的方法最早是由 Christoffel(1869) 发现的。我们利用 Levi-Civita 在 1917 年导入的**平行移动**的概念来解释共变微分。

设 X_i 为一个共变向量，$u^i(t)$ 为空间中的曲线，则 $X_i\dot{u}^i$ 沿曲线是不变量。现把 $u^i(t)$ 取成是过 (u_0^i) 点且沿方向 $(\dot{u}_0^i)$ 前进的测地线，且 $t=s$ 为曲线弧长。我们来计算 $X_i\dot{u}^i$ 沿这条测地线的导数。

由本节 3 段的公式(16)可得

$$\frac{d}{ds}(X_i\dot{u}^i)=\left(\frac{\partial X_i}{\partial u^k}-\Gamma^l_{ik}X_l\right)\dot{u}_0^i\dot{u}_0^k. \tag{1}$$

上式左边是坐标变换的不变量，而右侧的 $\dot{u}_0^i$ 又是任意的，所以

$$X_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial u^k}-\Gamma^l_{ik}X_l \tag{2}$$

必定是一个二阶的共变张量。

从这个张量出发容易确定一个沿一般曲线 $u^i(t)$ 定义的向量

$$V_i=X_{ik}\dot{u}^k, \tag{3}$$

式中

$$\dot{u}^k=\frac{du^k}{dt} \tag{4}$$

表示曲线 $u^k=u^k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n)$的切向量. 根据(2)改写(3)为

$$V_i=\frac{\partial X_i}{\partial u^k}\dot{u}^k-\Gamma^l_{ik}X_l\dot{u}^k,$$

就是

$$V_i=\frac{dX_i}{dt}-\Gamma^l_{ik}X_l\frac{du^k}{dt}. \tag{5}$$

由此可见，当向量 $X_i(t)$沿曲线 $u^i(t)$的各点为已知时，我们总可由(5)式决定它所对应的共变向量 $V_i(t)$.

如果由此导出的向量 $V_i(t)$ 为零向量，则原来的一系向量 $X_i(t)$必具有特殊性质. 我们称这系向量 $X_i(t)$ 沿所讨论的曲线是平行的. 换句话说，

如果向量 $X_i(t)$沿曲线 $u^k(t)$所导来的向量 $V_i(t)$ 都是零向量，即

$$X_{i\,k}\dot{u}^k=\frac{dX_i}{dt}-\Gamma^l_{ik}X_l\frac{du^k}{dt}=0, \tag{6}$$

向量 $X_i(t)$称为沿曲线 $u^k(t)$的**平行向量**.

这个定义是与参数 t 的选择无关的，也就是说，这定义具备**内在意义**.

平行向量的定义式(6)是关于 X_i 的线性常微分方程组，所以在一条已知曲线 $u^i(t)$的任何定点 $u^i(t_0)$任意作一向量 X^0_i，总能唯一决定(6)的解 $X_i(t)$，使得 $X_i(t_0)=X^0_i$. 如此所得的各向量 $X_i(t)$称为原向量 X^0_i 沿曲线 $u^k(t)$ **平行移动**时所得的向量. 这个性质与普通的平行移动非常相似.

Levi-Civita 的平行移动有不少重要的性质，我们列举如下：

(I) 平行移动与坐标系统的选择无关.

方程组(6)表示一个共变向量的分量为零. 假如把坐标 (u^i) 改为$(\bar{u}^i)$，则

$$V_k=\frac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^k}\bar{V}_i \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

然而

$$V_k=0, \qquad J=\frac{\partial(\bar{u}^1,\bar{u}^2,\cdots,\bar{u}^n)}{\partial(u^1,u^2,\cdots,u^n)}\neq 0,$$

所以仍旧有

$$\bar{V}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(II) 如两向量 X_i 与 Y_i 沿同一曲线作平行移动，则它们的数量积 $g^{ik}X_iY_k$ 沿此曲线必为常数，即

$$\frac{d}{dt}(g^{ik}X_iY_k)=0. \tag{7}$$

证明 由(6)可得

$$\frac{d}{dt}(g^{ik}X_iY_k)=\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}X_iY_k\dot{u}^l+g^{ik}Y_k\Gamma^m_{il}X_m\dot{u}^l+g^{ik}X_i\Gamma^m_{kl}Y_m\dot{u}^l.$$

因为第二项与第三项中的 i,k,m 都是哑数，所以可适当更改，把它们分别写为

$$g^{mk}\Gamma^i_{ml}X_iY_k\dot{u}^l, \qquad g^{im}\Gamma^k_{ml}X_iY_k\dot{u}^l,$$

于是

$$\frac{d}{dt}(g^{ik}X_iY_k)=\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}+g^{mk}\Gamma^i_{ml}+g^{im}\Gamma^k_{ml}\right)X_iY_k\dot{u}^l.$$

另一方面，如果我们关于 u^l 微分

$$g^{sk}g_{sr}=\delta^k_r,$$

便得到

$$g_{sr}\frac{\partial g^{sk}}{\partial u^l}+g^{sk}\frac{\partial g_{sr}}{\partial u^l}=0.$$

在上式两端乘 g^{ir} 并关于 r 求和，则得

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}+g^{ir}g^{sk}\frac{\partial g_{sr}}{\partial u^l}=0.$$

再根据本节 3 段的(12)式，

$$\frac{\partial g_{sr}}{\partial u^l}=\Gamma_{ls,r}+\Gamma_{lr,s},\tag{8}$$

由此可得

$$g^{ir}g^{sk}\frac{\partial g_{sr}}{\partial u^l}=g^{sk}\Gamma^i_{ls}+g^{ir}\Gamma^k_{lr}.$$

如果把上式右边第一项中的 s 改为 m，第二项中的 r 也改为 m，结合前面的式子，我们就得到

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial u^l}+g^{mk}\Gamma^i_{ml}+g^{im}\Gamma^k_{ml}=0.\tag{8'}$$

由此自然可以推出(7)式. 证毕.

(7)式可改写如下：

$$\frac{d}{dt}(X^iY_i)=0,$$

$$\frac{dX^i}{dt}Y_i+X^i\Gamma^m_{il}Y_m\dot{u}^l=0,$$

即

$$\left(\frac{dX^i}{dt}+\Gamma^i_{kl}X^k\dot{u}^l\right)Y_i=0.$$

由于 Y_i 是沿曲线 $u^i(t)$ 的任何平行移动的向量，所以

$$\frac{dX^i}{dt}+\Gamma^i_{kl}X^k\dot{u}^l=0.$$

因此，我们便得到以下两组等价的平行移动的公式：

$$\begin{aligned}\frac{dX^i}{dt}&=-\Gamma^i_{kl}X^k\frac{du^l}{dt},\\ \frac{dX_i}{dt}&=\Gamma^l_{ki}X_l\frac{du^k}{dt}.\end{aligned}\tag{9}$$

(III) 欧氏空间中的 Levi-Civita 平行移动与普通的平行移

动一致.

我们可在欧氏空间中取平行坐标(u^i)，这时它线素的表示式$ds^2=g_{ik}du^idu^k$中g_{ik}都是常数. 所以一切的Christoffel记号Γ全等于零，于是(9)化为

$$\frac{dX^i}{dt}=0,\ \text{即}X^i=\text{常数}.$$

(IV) 如果一条曲线的切向量沿曲线本身平行移动，则此曲线必为测地线，且其逆亦真.

这事实是(9)式与本节3段中公式(16)合用的结果.

5. Christoffel的共变微分

设P_{ik}为二阶共变张量，则$P_{ik}X^iY^k$便是不变式. 当X^i，Y^i两向量沿$\dot{u}^i$的方向平行移动时，这个不变式的导数等于

$$\frac{d}{dt}(P_{ik}X^iY^k)=\left(\frac{\partial P_{ik}}{\partial u^l}-\Gamma^m_{il}P_{mk}-\Gamma^m_{kl}P_{im}\right)X^iY^k\dot{u}^l. \tag{1}$$

所以

$$P_{ik,l}=\frac{\partial P_{ik}}{\partial u^l}-\Gamma^m_{il}P_{mk}-\Gamma^m_{kl}P_{im} \tag{2}$$

是一个三阶共变张量，我们称它为P_{ik}关于u^l的**共变导数**，记为$P_{ik,l}$.

类似地，从

$$\frac{d}{dt}(P^{ik}X_iY_k)=\left(\frac{\partial P^{ik}}{\partial u^l}+\Gamma^i_{ml}P^{mk}+\Gamma^k_{ml}P^{im}\right)X_iY_k\dot{u}^l \tag{3}$$

可知

$$P^{ik}{}_{,l}=\frac{\partial P^{ik}}{\partial u^l}+\Gamma^i_{ml}P^{mk}+\Gamma^k_{ml}P^{im} \tag{4}$$

是三阶张量，关于i,k为反变，关于l则为共变. 若记

$$P^{ik,r}=g^{rl}P^{ik}{}_{,l}, \tag{5}$$

则它就是一个三阶纯反变的张量. $P^{ik}{}_{,l}$ 称为 P^{ik} 关于 u^l 的**共变导数**.

依照上段 3 的结果, $g^{ik}X_iY_k=g_{ik}X^iY^k$ 对于两个向量 X^i, Y^k 的平行移动来说是不变量, 由此可知

$$g_{ik;l}=0, \qquad g^{ik,l}=0. \tag{6}$$

这个结果称为 Ricci 引理.

上述运算也适用于任何阶数的张量, 从而求出它的共变导数. 例如, 对于共变向量 X_i,

$$X_{i;k}=X_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial u^k}-\Gamma^l_{ik}X_l,$$

这与上段 3 的公式(2)一致.

对于一个三阶张量 A_{ikl}, 则有

$$A_{ikl;r}=\frac{\partial A_{ikl}}{\partial u^r}-\Gamma^m_{ir}A_{mkl}-\Gamma^m_{kr}A_{iml}-\Gamma^m_{lr}A_{ikm}. \tag{7}$$

其它的张量都依此类似地定义它们的共变导数.

共变微分的计算法则与普通微分相似, 例如:

记 $Z_{pq}=X_{pq}+Y_{pq}$, 则

$$X_{pq;r}+Y_{pq;r}=Z_{pq;r}. \tag{8}$$

记 $X_{ik}Y_{pq}=Z_{ikpq}$, 则

$$X_{ik;r}Y_{pq}+X_{ik}Y_{pq;r}=Z_{ikpq;r} \tag{9}$$

记 $F_r=X^{ik}Y_{ikr}$, 则

$$F_{r;s}=X^{ik,l}g_{ls}Y_{ikr}+X^{ik}Y_{ikr;s}. \tag{10}$$

记 $Z=X^{ik}Y_{ik}$, 则

$$Z_r=\frac{\partial Z}{\partial u^r}=X^{ik,s}g_{rs}Y_{ik}+X^{ik}Y_{ik;r}=X_{ik;r}Y^{ik}+X^{ik}Y_{ik;r}. \tag{11}$$

式中必须注意的是

$$X_{ik;r}=X^{pq,s}g_{ip}g_{kq}g_{sr}.$$

它的正确性来自 Ricci 引理, 即

$$X_{ik,r}=(X^{pq}g_{ip}g_{kq})_{,r}=X^{pq,s}g_{rs}g_{ip}g_{kq}.$$

换句话说，张量的上指标可利用 g_{ik} 下降， 它的下指标也可利用 g^{ik} 上升， 而且在共变微分中 g_{ik} 与 g^{ik} 的地位与常数在普通微分中的地位相当，当它作为因子时也可以自由出入于共变微分记号中，例如 $g_{ir}P^{i}{}_{,l}=P_{r,l}$.

在 § 20. 2，3 中关于已知二次微分形式所作的 Beltrami 第一阶与第二阶微分参数，现在可改写为简洁的形式. 设所参考的二次形式是

$$g_{ik}du^{i}du^{k},$$

则第一阶微分参数是

$$\nabla(\varphi,\psi)=g^{ik}\varphi_{i}\psi_{k}, \tag{12}$$

式中

$$\varphi_{i}=\frac{\partial\varphi}{\partial u^{i}},\qquad \psi_{i}=\frac{\partial\psi}{\partial u^{i}}.$$

因为 g^{ik} 是反变的二阶张量， 且 φ_i， ψ_k 则都是共变向量， 所以 $\nabla(\varphi,\psi)$ 必定是一个不变量.

这时，第二阶微分参数则为

$$\Delta\varphi=g^{ik}\varphi_{ik}, \tag{13}$$

式中

$$\varphi_{ik}=\varphi_{ki}=\varphi_{i,k}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^{i}}\right)_{,k}.$$

证明 根据行列式微分公式以及本节第 4 段公式(8)

$$\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^{r}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial u^{r}}=\frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^{r}}$$

$$=\frac{1}{2}g^{ik}(\Gamma_{ri,k}+\Gamma_{rk,i})=g^{ik}\Gamma_{ri,k}=\Gamma^{i}_{ri},$$

所以我们根据 § 20. 3 改写如下(已省略和号)：

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\left(\sqrt{g}\,g^{rs}\varphi_s\right)=g^{rs}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^r\partial u^s}+\frac{\varphi_l}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^r}\left(\sqrt{g}\,g^{rl}\right).$$

但是

$$\varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial u^i},$$

$$\varphi_{ik}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\right)_{,k}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\partial u^k}-\Gamma^{\ l}_{ik}\varphi_l,$$

因而

$$\Delta\varphi=g^{rs}\varphi_{rs}+\left\{g^{rs}\Gamma^{\ l}_{rs}+g^{rl}\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^r}+\frac{\partial g^{rl}}{\partial u^r}\right\}\varphi_l.$$

再按照本节第 4 段公式(8′),

$$\frac{\partial g^{rl}}{\partial u^r}=-\{g^{sl}\Gamma^{\ r}_{rs}+g^{rp}\Gamma^{\ l}_{rp}\},$$

于是

$$g^{rs}\Gamma^{\ l}_{rs}+g^{rl}\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^r}+\frac{\partial g^{rl}}{\partial u^r}$$

$$=g^{rs}\Gamma^{\ l}_{rs}+g^{rl}\Gamma^{\ i}_{ri}-(g^{sl}\Gamma^{\ r}_{rs}+g^{rp}\Gamma^{\ l}_{rp})=0.$$

因此即得(13)式. 证毕.

从 g^{ik},φ_{ik} 的张量性质我们容易知道 $\Delta\varphi$ 是不变量.

6. Riemann 的曲率张量

在黎曼空间中,设 F 是点的函数,即 $F=F(u^1,u^2,\cdots,u^n)$, 则

$$F_i=\frac{\partial F}{\partial u^i},$$

$$F_{ik}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^i\partial u^k}-\Gamma^{\ l}_{ik}F_l,$$

所以 F_{ik} 关于下指标对称.

这个性质与普通函数的二阶导数相类似. 但这个性质对三阶以上的共变导数并不成立. 以三阶为例,这时

$$F_{ikr}=\frac{\partial F_{ik}}{\partial u^r}-\Gamma^m_{ir}F_{mk}-\Gamma^m_{kr}F_{im},$$

即

$$F_{ikr}=\left\{\frac{\partial^3 F}{\partial u^i\partial u^k\partial u^r}-\Gamma^m_{kr}F_{im}-\Gamma^m_{ri}F_{km}-\Gamma^m_{ik}F_{rm}\right\}$$
$$-\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^r}+\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mr}\right)F_l,$$

式中{ }的部分关于 i,k,r 是对称的.

由此我们得到

$$F_{ikr}-F_{irk}=R_{imrk}g^{ml}F_l=R^{l}_{i\cdot rk}F_l,\tag{1}$$

其中

$$R^{l}_{i\cdot rk}=g^{ml}R_{imrk}=\frac{\partial\Gamma^l_{ir}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^r}+\Gamma^m_{ir}\Gamma^l_{mk}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mr}.\tag{2}$$

R_{imrk} 是一个四阶共变张量，它完全决定于 g_{ik}. 这个张量称为 Riemann 的曲率张量.

从(2)式我们可以推出

$$R_{imrk}=\frac{\partial\Gamma_{ir,m}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik,m}}{\partial u^r}+\Gamma_{ik,s}\Gamma^s_{mr}-\Gamma_{ir,s}\Gamma^s_{mk}.\tag{3}$$

其实，我们按定义便有

$$R_{imrk}=g_{ml}g^{ls}R_{isrk}$$
$$=g_{ml}\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ir}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^r}+\Gamma^s_{ir}\Gamma^l_{sk}-\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{sr}\right)$$
$$=g_{ml}\frac{\partial\Gamma^l_{ir}}{\partial u^k}-g_{ml}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^r}+\Gamma^s_{ir}\Gamma_{sk,m}-\Gamma^s_{ik}\Gamma_{sr,m}$$
$$=\frac{\partial(g_{ml}\Gamma^l_{ir})}{\partial u^k}-\frac{\partial(g_{ml}\Gamma^l_{ik})}{\partial u^r}+\Gamma^s_{ir}\Gamma_{sk,m}-\Gamma^s_{ik}\Gamma_{sr,m}$$
$$+\Gamma^l_{ik}\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^r}-\Gamma^l_{ir}\frac{\partial g_{ml}}{\partial u^k}$$
$$=\frac{\partial\Gamma_{ir,m}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik,m}}{\partial u^r}+\Gamma_{ks,m}\Gamma^s_{ir}-\Gamma_{rs,m}\Gamma^s_{ik}$$

$$+\Gamma^l_{ik}(\Gamma_{rm,l}+\Gamma_{rl,m})-\Gamma^l_{ir}(\Gamma_{km,l}+\Gamma_{kl,m})$$

$$=\frac{\partial\Gamma_{ir,m}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik,m}}{\partial u^r}+\Gamma_{ik,s}\Gamma^s_{rm}-\Gamma_{ir,s}\Gamma^s_{km}.$$

如果我们作不变量

$$S=-\frac{1}{2}R_{imrk}g^{ik}g^{mr}, \tag{4}$$

那么在二维空间($n=2$)中，S 便表示二次微分形式的 Gauss 曲率(证明可参照下一节 §26·3).

从(3)式容易知道 R_{imrk} 关于后两指标 r,k 是反称的，即

$$R_{imrk}=-R_{imkr}. \qquad (5)(a)$$

又根据公式

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r}=\Gamma_{ri,k}+\Gamma_{rk,i},$$

我们容易证明 R_{imrk} 关于前两指标 i,m 也是反称的，即

$$R_{imrk}=-R_{mirk}. \qquad (5)(b)$$

此外，还成立下面的两个恒等式:

$$R_{imkr}+R_{ikrm}+R_{irmk}=0, \qquad (5)(c)$$

$$R_{imkr}=R_{krim}. \qquad (5)(d)$$

证明 我们把(3)改写为

$$R_{imrk}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{mr}}{\partial u^i\partial u^k}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial u^i\partial u^r}+\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^r\partial u^m}-\frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial u^m\partial u^k}\right\}$$
$$+(\Gamma_{ik,s}\Gamma_{mr,p}-\Gamma_{ir,s}\Gamma_{mk,p})g^{ps}, \tag{3'}$$

并将类似的式子代入(c)的左端和(d)的两端，即可断定其成立.

我们还可以从(a)，(b)，(c)导出(d)，这个事实最初是G. Ricci指出的. 为此只要写出(c)以及(c)的第一项指标分别为 $mkri$; $krim$; $rimk$ 的三个对应等式，先把这四个等式边边相加，然后再利用(a)，(b)，(c)化简，则即可求出(d).

根据(5)，我们还可把(1)改写为

$$F_{ikr}-F_{irk}=R^{m}_{\cdot ikr}F_{m}. \qquad (1')$$

在二维空间中成立关系式

$$R_{imrk}=(g_{ir}g_{mk}-g_{ik}g_{rm})S. \qquad (4')$$

现在我们来计算 Riemann 曲率张量的独立分量个数. 一般来说，一个四阶张量应有 n^4 个分量. 但是由于 Riemann 曲率张量要满足上述的这些恒等式，所以它的独立分量个数必须减少. 我们把它的分量分成三类，然后分别算出各类中独立的个数.

(1) 仅有两个不同指标的分量. 这类分量必定具有 R_{ijij} 的形式，因为指标的其他可能排列或可化为这形式，或者等于零. 这时只有每对不同的指标 i,j 才能表示这一类中的一个分量，所以它们的总数等于

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

(2) 仅有三个不同指标的分量. 这类分量必定具有 R_{ijih} 的形式，指标的其他排列或可化为这种形式，或者等于零. 但要注意的是已知三个不同的指标 i,j,h 时，可以得到三个属同一类型的分量，即 $R_{ijih},R_{jhji},R_{hihj}$. 又因为从 n 个指标中取三个的组合数为 $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$，所以这类分量的总数等于

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

(3) 具有四个不同指标的分量. 对于四个均不相同的每一组指标 i,j,h,k，我们可写出三个分量

$$R_{ijhk},\quad R_{ihkj},\quad R_{ikjh},$$

指标的其他排列都可化成它们中的某一个. 但是根据(5)(c)，这三个分量并不独立，独立的只有两个. 从 n 个指标中取四个的组合数是 $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$，所以这类分量的总数应是这个组合

数的两倍，也就是等于

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

将上列三类总数合计，我们得到 Riemann 张量的独立分量个数 N 为

$$N=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

例如，对于普通的二维空间，$N=1$；对于三维空间，$N=6$；对于四维空间，则有 $N=20$.

7. 沿无穷小平行四边形的循环移动

设 P 为空间 R_n 中的任何一点，$\delta\boldsymbol{u}$ 与 $\delta'\boldsymbol{u}$ 是 P 处的两个无穷小向量：$\delta\boldsymbol{u}$ 是 $P(u^i)$ 到 $P'(u^i+\delta u^i)$ 的连线向量，$\delta'\boldsymbol{u}$ 为 $P(u^i)$ 到 $P''(u^i+\delta' u^i)$ 的连线向量. 现在我们把 $\delta\boldsymbol{u}=\overrightarrow{PP'}$ 沿 $\delta'\boldsymbol{u}=\overrightarrow{PP''}$ 的方向作平行移动，端点 P' 应移到一点 Q. 如果我们也把 $\delta'\boldsymbol{u}=\overrightarrow{PP''}$ 沿 $\delta\boldsymbol{u}=\overrightarrow{PP'}$ 的方向平行移动，则它的端点 P'' 便移到另一点，然而在一阶无穷小的范围内，这点必与 Q 重合. 其实，根据平行移动的公式(参考本节 4,(9)式)我们得到 Q 点的坐标是

$$u^i+\delta u^i+\delta'(u^i+\delta u^i)=u^i+\delta u^i+\delta' u^i+\delta'\delta u^i,$$

而且

$$\delta'\delta u^i=-\Gamma^i_{kl}\delta u^k\delta' u^l=-\Gamma^i_{kl}\delta u^l\delta' u^k=\delta\delta' u^i, \tag{1}$$

于是我们有

$$u^i+\delta u^i+\delta'(u^i+\delta u^i)=u^i+\delta' u^i+\delta(u^i+\delta' u^i).$$

这样得到的四边形 $PP'QP''P$ 称为空间的**无穷小平行四边形**.

设 $\delta\Phi$ 表示一个量或者一个向量在点 P 移至 P' 时所产生的变差，而 $\delta'\Phi$ 则是它在点 P 移至 P'' 时所产生的变差. 现在我们从

P 出发，沿 $PP'Q$ 而到达 Q 点，这时 Φ 所产生的变差用 $D_1\Phi$ 表示. 但原向量 Φ 以 P 为起点且依平行移动而更改，沿 $PP''Q$ 到达 Q 点. 时，我们则用 $D_2\Phi$ 来表示 Φ 所产生的变差.

设 Φ 为一个向量，而且它以 P 为起点进行平行移动. 那么，当 Φ 沿无穷小平行四边形 $PP'QP''P$ 平行移动一周时，所受到的变差就是

$$\Delta\Phi = D_1\Phi - D_2\Phi.$$

由于

$$D_1\Phi = \delta\Phi + \delta'\Phi + \delta'\delta\Phi,$$

$$D_2\Phi = \delta'\Phi + \delta\Phi + \delta\delta'\Phi,$$

所以

$$\Delta\Phi = (\delta'\delta - \delta\delta')\Phi. \tag{2}$$

我们用 X^i 来表示 Φ 的分量，那么根据本节第 4 段的公式 (9)，

$$\delta X^i = -\Gamma^i_{jk} X^j \delta u^k, \tag{3}$$

于是

$$\delta'\delta X^i = -\delta'\Gamma^i_{jk} X^j \delta u^k - \Gamma^i_{jk}\delta' X^j \delta u^k - \Gamma^i_{jk} X^j \delta'\delta u^k.$$

由于

$$\delta'\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l}\delta' u^l,$$

$$\delta' X^l = -\Gamma^l_{jm} X^j \delta' u^m,$$

所以

$$\delta'\delta X^i = -\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} - \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl}\right) X^j \delta u^k \delta' u^l - \Gamma^i_{jk} X^j \delta'\delta u^k.$$

结合(1)式，我们便容易推出

$$\begin{aligned}\Delta X^i &= \delta'\delta X^i - \delta\delta' X^i \\ &= -\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial u^k} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml} - \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk}\right) X^j \delta u^k \delta' u^l,\end{aligned}$$

也就是

$$\Delta X^i = -R_{j\cdot kl}^{i} X^j \delta u^k \delta' u^l. \tag{4}$$

用同样的方法我们可得

$$\Delta X_i = -R_{\cdot ikl}^{j} X_j \delta u^k \delta' u^l. \tag{5}$$

由此可见，当一向量沿一个无穷小平行四边形平行移动一周时，最后所得的向量一般与原来的向量并不重合，一般地说，它的原因就在于 $R_{jikl} \neq 0$. 这个事实是 B. Riemann(1854) 发现的.

习 题

1. 试导出一般张量 $T_{i_1 i_2 \cdots i_p}^{\cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ j_1 j_2 \cdots j_q}$ 的变换规律.

2. 设 Γ_{jk}^{i} 是在坐标 $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ 中的 Christoffel 记号，$\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ 则是在坐标变换 $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ 后的 Christoffel 记号，证明:

$$\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{jk}^{i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i} + \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^\beta \partial \bar{u}^\gamma}.$$

3. 直接证明

$$\frac{\partial \Gamma_{jl}^{i}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^{i}}{\partial u^l} + \Gamma_{jl}^{h} \Gamma_{hk}^{i} - \Gamma_{jk}^{h} \Gamma_{hl}^{i}$$

是一个张量 $R_{\cdot jkl}^{i}$ 的分量.

4. 设 Ω_l 为共变向量，则

$$\Omega_{kl} = \frac{\partial \Omega_l}{\partial u^k} - \frac{\partial \Omega_k}{\partial u^l}$$

是一个张量的分量.

5. 若 $a_r^{\cdot s}$ 是一个二阶张量的分量，则行列式 $|a_r^{\cdot s}|$ 是绝对不变量.

6. 若 a_{rs} 是一个二阶共变张量，则行列式 $|a_{rs}|$ 是权 2 的不变量.

7. 若 a^{rs} 是一个二阶反变张量，则行列式 $|a^{rs}|$ 是权 -2 的不变量.

8. 设 $\lambda_{(1)}^{i}, \lambda_{(2)}^{i}, \cdots, \lambda_{(n)}^{i}$ 是 n 个反变向量. 证明: 行列式 $|\lambda_{(r)}^{i}|$ 是权 -1 的不变量.

9. 如果 $a_{\cdot r}^{s}$ 是一个张量的分量，则行列式 $|a_{\cdot s}^{r}|$ 的所有代数余子式也是一个张量的分量.

10. 设 a_{sr}, g_{sr} 为两个张量，则方程

$$|a_{rs}-\theta g_{rs}|=0$$

的根都是不变量.

11. 设 $u^i=u^i(v^1,v^2,\cdots,v^m)$ $(i=1,2,\cdots,n;\ m\leqslant n)$ 是 R_n 中一个 m 维集合 V_m 的方程，$b_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=1,2,\cdots,m)$ 为 V_m 的基本张量，而且 $\Gamma^{(b)}{}_{\alpha\beta,\gamma}$ 与 $\Gamma^{(b)}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 为对应的 Christoffel 记号. 证明

1° $b_{\alpha\beta}=g_{ik}\dfrac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\dfrac{\partial u^k}{\partial v^\beta}$.

2° $\Gamma^{(b)}{}_{\alpha\beta,\gamma}=\Gamma_{ik,l}\dfrac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\dfrac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\dfrac{\partial u^l}{\partial v^\gamma}+g_{ik}\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial v^\alpha\partial v^\beta}\dfrac{\partial u^k}{\partial v^\gamma}$.

3° 如果 R_n 的测地线落在 V_m 内，则它必定是 V_m 的测地线.

12. 证明：在适当的坐标系 $(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ 的选取下，可使线素采取形式

$$ds^2=(du^1)^2+\sum_{r,s=2}^{n}a_{rs}du^r du^s.$$

13. 如果 $ds^2=(H_1)^2(du_1)^2+(H_2)^2(du^2)^2+\cdots+(H_n)^2(du^n)^2$，则对于两两不等的指标 i,l,K，成立

$$\Gamma^l_{iK}=0,\ \Gamma^K_{iK}=\frac{\partial\ln H_K}{\partial u^i},$$

$$\Gamma^l_{KK}=-\frac{H_K}{(H_l)^2}\frac{\partial H_K}{\partial u^l},\ \Gamma^K_{KK}=\frac{\partial\ln H_K}{\partial u^K}.$$

14. 如果反变向量 X^i 沿一条曲线平行移动，则对应的共变向量 $X_i=g_{ij}X^j$ 沿同一条曲线也平行移动.

15. 证明：反变向量 X^r 的散度

$$X^r{}_{,r}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^r}(\sqrt{g}X^r).$$

16. 证明：$X^{rs}{}_{,s}=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial u^s}(\sqrt{g}X^{rs})+X^{jk}\Gamma^r_{jk}$，从而当 X^{rs} 为反称时，末项消失.

17*. 证明 Bianchi 恒等式

$$R_{ihjk,l}+R_{ihkl,j}+R_{ihlj,k}=0.$$

18*. 如在 $R_n(n\geqslant3)$ 中成立

$$R_{hijk}=K(g_{hk}g_{ij}-g_{hj}g_{ik}),$$

这里的 $K=K(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ 是与指标值 h,i,j,k 无关的函数，则 K 必定为常数. (F. Schur, 1886)

19*. 按 $R^{l}_{\cdot ijl}=R_{ij}$ 定义张量 R_{ij}，并按

$$R=g^{il}R_{il}$$

定义不变量 R. 如果成立 $R_{ij}=\frac{R}{n}g_{ij}$，则这时的 R_n 就称为爱因斯坦空间.
证明：凡是 $n>2$ 的爱因斯坦空间，R 必等于常数. (G. Herglotz, 1921)

凡具有 Schwarzschild 形式线素

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$(m=\text{常数})$$

的黎曼空间必为 $R=0$ 的爱因斯坦空间. (Schwarzschild, 1916)

20*. 凡是 R_{ijkl} 都等于零的黎曼空间必为欧氏空间.

§26. 曲面论基本方程

1. 关于曲面线素的 Christoffel 记号

设
$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$
$$\varphi=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$$

分别为曲面的第一与第二基本形式. 两类基本量 E,F,G 与 L,M,N 之间自然存在着关系式，例如用 E, F, G 来表示总曲率 K 的 Gauss 方程(参见 §23.1)就是这类关系. 这种关系通称为曲面论的基本方程，其中除了 Gauss 方程外，还有另外两个，它们先后为 Mainardi(1857)及 Codazzi(1868)所独立发现.

为了便于应用绝对微分学，我们记

$$E=g_{11},\quad F=g_{12}=g_{21},\quad G=g_{22};$$
$$u=u^1,\quad v=u^2,$$

从而就把第一基本形式改写为 $ds^2=g_{ik}du^idu^k$. 下面，我们根据定义

$$\Gamma_{ik,r}=[ik,r]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{kr}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^r}\right)$$

来计算第一类 Christoffel 记号:

$$\Gamma_{11,1}=\frac{1}{2}E_u,\qquad \Gamma_{11,2}=F_u-\frac{1}{2}E_v,$$

$$\Gamma_{12,1}=\frac{1}{2}E_v,\qquad \Gamma_{12,2}=\frac{1}{2}G_u,\tag{1}$$

$$\Gamma_{22,1}=F-\frac{1}{2}G_u,\qquad \Gamma_{22,2}=\frac{1}{2}G_v.$$

再按照 $g^{11}=G/(EG-F^2)$，$g^{12}=g^{21}=-F/(EG-F^2)$，$g^{22}=E/(EG-F^2)$以及

$$\Gamma^r_{ik}=g^{rl}\Gamma_{ik,l}=\begin{Bmatrix} r \\ ik \end{Bmatrix}=g^{rl}[ik,l]$$

我们容易求出下面的第二类 Christoffel 记号:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u+FE_v-2FF_u}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{11}=\frac{-FE_u-EE_v+2EF_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\Gamma^1_{12}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},\qquad \Gamma^2_{12}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},\tag{2}$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{-FG_v-GG_u+2GF_v}{2(EG-F^2)},\quad \Gamma^2_{22}=\frac{EG_v+FG_u-2FF_v}{2(EG-F^2)}.$$

从而推导出两个恒等式

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln\sqrt{EG-F^2}=\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\ln\sqrt{EG-F^2}=\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{22}.$$

其次，如果我们记

$$L=h_{11},\ M=h_{12}=h_{21},\ N=h_{22},\tag{3}$$

则第二基本形式就可改写为

$$\varphi=h_{ik}du^i du^k$$

回忆起以前的定义，如果我们把曲面的向量表示记为$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2))$，单位法向量记为$\boldsymbol{n}(u^1,u^2)=(X(u^1,u^2),Y(u^1,u^2),Z(u^1,u^2))$，并记 $\boldsymbol{r}_i=\frac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{n}_i=\frac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{r}_{ik}$

$=\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k}\boldsymbol{r}$ 的话，则就成立

$$g_{ik}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_k, \tag{4}$$

$$h_{ik}=-\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{n}_k=-\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{n}_i=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{ik}$$

其中，$\boldsymbol{r}_{ik}$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 关于 u^i 和 u^k 的二阶导数，而且最后的等式是由 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=0$ 导出的. 我们还可以直接用曲面上点的坐标 x,y,z 及其导数来表示 $\Gamma_{ik,r}$ 如下:

$$\Gamma_{ik,r}=\boldsymbol{r}_r\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^k}. \tag{5}$$

2. 基本微分方程

由于 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$ 是空间中的独立向量组，所以向量 $\boldsymbol{r}_{rs}$ 总能被唯一地表示为如下形式:

$$\boldsymbol{r}_{rs}=\alpha_{rs}{}^l\boldsymbol{r}_l+\beta_{rs}\boldsymbol{n}, \tag{1}$$

这里的 $\alpha_{rs}{}^l$ 与 $\beta_{rs}(l,r,s=1,2)$ 都是待定系数.

在(1)的两边点乘 $\boldsymbol{n}$，并注意到

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_l=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{rs}=h_{rs},$$

我们便有

$$\beta_{rs}=h_{rs}. \tag{2}$$

其次，在(1)两边点乘 $\boldsymbol{r}_t$，则有

$$\boldsymbol{r}_{rs}\cdot\boldsymbol{r}_t=\alpha_{rs}{}^l g_{lt}.$$

但是根据上一段中的公式(5)，

$$\Gamma_{rs,t}=\alpha^l_{rs}g_{lt}.$$

因此我们得到

$$\alpha^k_{rs}=\alpha^l_{rs}g_{lt}g^{tk}=g^{tk}\Gamma_{rs,t}=\Gamma^k_{rs}. \tag{3}$$

为了把(1)式写得更为简洁，我们作向量 $\boldsymbol{r}_i$ 关于 u^j 的共变导数 $\boldsymbol{r}_{i,j}$. 这样(1)便可写成如下的微分方程组:

$$\boldsymbol{r}_{r,s}=h_{rs}\boldsymbol{n}\quad(r,s=1,2). \tag{I}$$

如果用普通的形式，则是

$$\boldsymbol{r}_{rs}=\Gamma^{l}_{rs}\boldsymbol{r}_{l}+h_{rs}\boldsymbol{n}. \tag{I*}$$

同样地，曲面单位法向量关于坐标 u^i 的偏导数 $\boldsymbol{n}_i$ 也应该有唯一分解式

$$\boldsymbol{n}_i=\alpha^{l}_{i}\boldsymbol{r}_l+\beta_i\boldsymbol{n}. \tag{4}$$

根据 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_i=0$ 我们得到

$$\beta_i=0,$$

$$\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{n}_i=\alpha^{l}_{i}g_{kl}=-h_{ik},$$

于是

$$\alpha^{p}_{i}=\alpha^{l}_{i}g_{kl}g^{kp}=-g^{kp}h_{ik}.$$

这样，我们得到

$$\boldsymbol{n}_i=-g^{pk}h_{ik}\boldsymbol{r}_p\quad(i=1,2). \tag{II}$$

如果我们把它改写为分量形式的话，即将 Weingarten 公式(§19.1)：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1&=\frac{FM-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_1+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_2,\\ \boldsymbol{n}_2&=\frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_1+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_2.\end{aligned} \tag{II*}$$

3. 可积分条件

由于我们是从已知的曲面出发而进行推导的，所以两组微分方程(I)与(II)都是可积分的，从而它们所含的各系数间必定存在某种关系，这就是所谓的可积分条件.

为了导出这些关系，我们先将(I)的两边关于 u^t 共变微分，则有

$$\boldsymbol{r}_{r,st}=h_{rs,t}\boldsymbol{n}+h_{rs}\boldsymbol{n}_t,$$

根据(II)改写它，

$$\boldsymbol{r}_{r,st}=h_{rs,t}\boldsymbol{n}-h_{rs}g^{pk}h_{tk}\boldsymbol{r}_p.$$

从此推出

$$\boldsymbol{r}_{r;st}-\boldsymbol{r}_{r;ts}=(h_{rs;t}-h_{rt;s})\boldsymbol{n}+g^{pk}(h_{rt}h_{sk}-h_{rs}h_{tk})\boldsymbol{r}_p.$$

然而依照 § 25.6 的公式(1),

$$\boldsymbol{r}_{r;st}-\boldsymbol{r}_{r;ts}=R_{rmts}g^{mp}\boldsymbol{r}_p,$$

所以我们有

$$(h_{rs;t}-h_{rt;s})\boldsymbol{n}+[g^{pk}(h_{rt}h_{sk}-h_{rs}h_{tk})-g^{pk}R_{rkts}]\boldsymbol{r}_p=0.$$

注意到 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$ 三个向量的线性独立性，最后关系式给出了下列方程:

$$h_{rs;t}-h_{rt;s}=0 \quad (r,s,t=1,2), \tag{III}$$

$$R_{rkts}=h_{rt}h_{sk}-h_{rs}h_{tk} \quad (k,r,s,t=1,2). \tag{IV}$$

下面我们再来求第二组方程(II)的可积分条件.

将(II)关于 u^r 共变微分,注意到 $g^{pk}{}_{,r}=0$,结果是

$$\boldsymbol{n}_{i;r}=-g^{pk}h_{ik;r}\boldsymbol{r}_p-g^{kp}h_{ik}\boldsymbol{r}_{p;r}.$$

根据(I)代入 $\boldsymbol{r}_{p;r}=h_{pr}\boldsymbol{n}$,便有

$$\boldsymbol{n}_{i;r}=-g^{pk}h_{ik;r}\boldsymbol{r}_p-g^{kp}h_{ik}h_{pr}\boldsymbol{n}.$$

然而 $\boldsymbol{n}_{i;r}$ 关于 i 及 r 是对称的,即

$$\boldsymbol{n}_{i;r}-\boldsymbol{n}_{r;i}=0,$$

所以我们得到

$$g^{pk}(h_{rk;i}-h_{ik;r})\boldsymbol{r}_p+g^{pk}(h_{rk}h_{pi}-h_{ik}h_{pr})\boldsymbol{n}=0.$$

注意到由 $g^{pk}=g^{kp}$ 可推出

$$g^{kp}h_{rk}h_{pi}=g^{pk}h_{rp}h_{ki}=g^{pk}h_{ik}h_{pr},$$

所以上式化简为

$$g^{pk}(h_{rk;i}-h_{ik;r})\boldsymbol{r}_p=0.$$

因此,我们得到唯一组的可积分条件:

$$h_{rk;i}-h_{ik;r}=0.$$

这不外于是前述的(III).

由此可见, (I)、(II)两组微分方程的可积分条件是(III)和(IV).

这两组条件就是所求的曲面论基本方程，因为我们是采用了绝对微分学，所以形状比较简练. 反之，如果用普通记号表示，显得繁杂的多. 我们叙述于下.

根据共变导数的定义(§25.5,公式(2))，

$$h_{rs,t}=\frac{\partial h_{rs}}{\partial u^t}-\Gamma^m_{rt}h_{ms}-\Gamma^m_{st}h_{rm},$$

由此我们就可把条件(III)作如下的改写.

如 $s=t$，则(III)中对应的方程是恒等式，所以只要看 $s\neq t$ 时的情形就可以了. 然当 $s\neq t,s,t=1,2$ 时，如果交换 s,t，那(III)所表示的仍是同一个条件，因此我们得知(III)中仅含有两个方程：

$$h_{r1,2}-h_{r2,1}=0\quad(r=1,2),$$

即

$$h_{11,2}-h_{12,1}=0, \tag{III$_1$}$$

$$h_{21,2}-h_{22,1}=0. \tag{III$_2$}$$

根据定义

$$h_{11,2}=\frac{\partial h_{11}}{\partial u^2}-\Gamma^m_{12}h_{m1}-\Gamma^m_{12}h_{1m},$$

$$h_{12,1}=\frac{\partial h_{12}}{\partial u^1}-\Gamma^m_{11}h_{m2}-\Gamma^m_{21}h_{1m},$$

于是

$$h_{11,2}-h_{12,1}=\frac{\partial h_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial h_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^m_{11}h_{m2}-\Gamma^m_{12}h_{1m}.$$

所以我们可改写(III)$_1$为

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial h_{12}}{\partial u^1}+\Gamma^m_{11}h_{m2}-\Gamma^m_{12}h_{1m}=0,$$

也就是

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}-\Gamma^1_{12}L+(\Gamma^1_{11}-\Gamma^2_{12})M+\Gamma^2_{11}N=0. \quad (\text{III}^*)_1$$

同样，改写(III)$_2$的结果是：

$$\frac{\partial N}{\partial u}-\frac{\partial M}{\partial v}+\Gamma^1_{22}L+(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})M-\Gamma^2_{12}N=0. \qquad (\mathrm{III}^*)_2$$

这两个方程(III*)通称为 Codazzi 方程.

接下来，我们研究(IV). 从 § 25.6 容易知道，曲率张量只有下列四个分量才有可能异于零：

$$R_{1212},\quad R_{1221},\quad R_{2112},\quad R_{2121},$$

而且根据 § 25.6,(5)，它们之间成立如下关系式

$$R_{1212}=-R_{1221}=-R_{2112}=R_{2121}.$$

另一方面，(IV)的右端表达式也满足 R_{ijrk} 所满足的恒等式(§ 25.6,(5))，所以(IV)实质上只含一个方程，此即

$$R_{1212}=h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}. \qquad (\mathrm{IV})'$$

记曲面的总曲率

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}h_{21}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}},$$

则

$$K=\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}}=S. \qquad (\mathrm{IV})''$$

式中，S 表示由 § 25.6 公式(4)定义的不变量.

由此看到，*在一曲面上，它的总曲率 K 等于不变量 S.*

根据曲率张量的定义(§ 25.6)

$$g^{ml}R_{imrk}=\frac{\partial\Gamma^l_{ir}}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^r}+\Gamma^m_{ir}\Gamma^l_{mk}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mr},$$

我们不难得到(IV)″的四种形式，就是：

$$\begin{aligned}
g^{m1}R_{2m21}&=g^{11}R_{2121}=g_{22}K,\\
g^{m1}R_{1m21}&=g^{21}R_{1221}=g_{12}K,\\
g^{m2}R_{2m21}&=g^{12}R_{2121}=-g_{12}K,\\
g^{m2}R_{1m21}&=g^{22}R_{1221}=-g_{11}K.
\end{aligned} \qquad (\mathrm{IV})'''$$

因为 g_{11}, g_{12}, g_{22} 中总有不为零的量，所以我们得出 K 由 E, F, G 及其导数所表示的公式，就是 Gauss 方程. 现在改写(IV)‴如下：

$$\left.\begin{aligned}
EK &= \frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{11}^{2} - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} \\
&\quad - (\Gamma_{12}^{2})^2, \\
FK &= \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^{1} - \frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{21}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}, \\
FK &= \frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{12}^{2} - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{22}^{2} + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}, \\
GK &= \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{22}^{1} - \frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{2}\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{1} - \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1} \\
&\quad - (\Gamma_{12}^{1})^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{IV}^*)$$

习 题

1. 证明

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{11}^{2}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{12}^{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma_{22}^{1}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\Gamma_{12}^{1}\right)\right].$$

2. 在 K 的公式中当 $F=0$ 时，证明

$$\frac{LN-M^2}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = 0.$$

3. 设 $\Gamma'^{\,i}_{jk}$ 是第三基本形式(§ 19.1)

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

的 Christoffel 记号，并记 $h=\sqrt{eg-f^2}$. 证明：

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} - \Gamma'^{1}_{12}L + (\Gamma'^{1}_{11} - \Gamma'^{2}_{12})M + \Gamma'^{2}_{11}N = 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} + \Gamma'^{1}_{22}L + (\Gamma'^{2}_{22} - \Gamma'^{1}_{12})M - \Gamma'^{2}_{12}N = 0,$$

$$\frac{1}{2h}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{eh}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{1}{h}\frac{\partial g}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{h}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{h}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{f}{eh}\frac{\partial e}{\partial u}\right)\right\} = 1.$$

4. 证明 Codazzi 方程的另一种形式:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\Gamma_{22}^2\frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$-2\Gamma_{12}^2\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}+\Gamma_{11}^2\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\Gamma_{11}^1\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$-2\Gamma_{12}^1\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}+\Gamma_{22}^1\frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}=0.$$

5. 导出 Codazzi 方程的下列形式:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{\sqrt{eg-f^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\Gamma_{22}^{\prime 2}\frac{L}{\sqrt{eg-f^2}}$$

$$-2\Gamma_{12}^{\prime 2}\frac{M}{\sqrt{eg-f^2}}+\Gamma_{11}^{\prime 2}\frac{N}{\sqrt{eg-f^2}}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{\sqrt{eg-f^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\Gamma_{11}^{\prime 1}\frac{N}{\sqrt{eg-f^2}}$$

$$-2\Gamma_{12}^{\prime 1}\frac{M}{\sqrt{eg-f^2}}+\Gamma_{22}^{\prime 1}\frac{L}{\sqrt{eg-f^2}}=0.$$

6. 设 u,v 为一曲面的曲率线参数，则基本方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\sqrt{G}}{R_2}=\frac{1}{R_1-R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\sqrt{E}}{R_1}=\frac{1}{R_2-R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v},$$

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right].$$

7. 设 u,v 为一曲面的渐近曲线参数，并记 $K=-\frac{1}{\rho^2}$. 证明:

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial u}=-2\Gamma_{12}^{\prime 2},\quad \frac{\partial\ln\rho}{\partial v}=-2\Gamma_{12}^{\prime 1};$$

$$E=\rho^2 e,\ F=-\rho^2 f,\ G=\rho^2 g;$$

$$\Gamma_{11}^1=\Gamma_{11}^{\prime 1}-2\Gamma_{12}^{\prime 2},\quad \Gamma_{11}^2=-\Gamma_{11}^{\prime 2},$$

$$\Gamma_{12}^1=-\Gamma_{12}^{\prime 1},\quad \Gamma_{12}^2=-\Gamma_{12}^{\prime 2},$$

$$\Gamma_{22}^1=-\Gamma_{22}^{\prime 1},\qquad \Gamma_{22}^2=\Gamma_{22}^{\prime 2}-2\Gamma_{12}^{\prime 1}.$$

8. 设曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x,y,z)$ 的坐标曲线 u, v 曲线是渐近曲线，总曲率 $K=-\frac{1}{\rho^2}$，则 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 必可表示为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=-\int[(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_u)du-(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_v)dv],$$

这里 $\boldsymbol{R}=(\xi,\eta,\zeta)$ 的三个分量函数是 Moutard 方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}=\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\partial v}-f\right)\varphi$$

的解. [上述 $\boldsymbol{r}$ 的表达式称为 Liouville 公式. 试用 $\boldsymbol{R}=\sqrt{\rho}\boldsymbol{n}$ 证明之.]

9. 设 $\boldsymbol{r}(u,v,w)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$ 是一个三重直交曲面系统的方程，而且它们的线素是

$$ds^2=H_1^2du^2+H_2^2du^2+H_3^2dw^2.$$

那么下列的 Lamé 方程成立：

$$\frac{\partial^2H_1}{\partial v\partial w}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial v}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial^2H_2}{\partial w\partial u}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2H_3}{\partial u\partial v}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v};$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w}=0.$$

10. 记 $u=u^1,v=u^2$; $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=h_{ik}du^idu^k$，且记 $\Gamma'^{\,i}_{j\,k}$ 是关于第三基本形式所作的 Christoffel 记号. 证明 Weingarten 公式

$$h_{ik,l}=(\Gamma'^{\,m}_{k\,l}-\Gamma^{m}_{kl})h_{im},$$

式中，共变微分是关于第一基本形式所作的.

11. 设 $u^i=u^i(s)\,(i=1,2)$ 为曲面上的一条曲线，s 为弧长. 证明：曲线的测地曲率（§21,2）等于

$$\sqrt{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}\begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{ds} & \Gamma_{i\,k}^1\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^k}{ds}+\dfrac{d^2u^1}{ds^2} \\ \dfrac{du^2}{ds} & \Gamma_{i\,k}^2\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^k}{ds}+\dfrac{d^2u^2}{ds^2} \end{vmatrix}.$$

12. 设(u,v)为曲面的共轭网，证明：

$$\Gamma_{11}^1=\frac{\partial\ln L}{\partial u}-\Gamma_{11}'^1,\qquad \Gamma_{12}^1=-\frac{N}{L}\Gamma_{11}'^2,$$

$$\Gamma_{22}^1=-\frac{N}{L}\Gamma_{12}'^2,\qquad \Gamma_{11}^2=-\frac{L}{N}\Gamma_{12}'^1,$$

$$\Gamma_{12}^2=-\frac{L}{N}\Gamma_{22}'^1,\qquad \Gamma_{22}^2=\frac{\partial\ln N}{\partial v}-\Gamma_{22}'^2.$$

§27. 基本定理

已知两个二次微分形式

$$g_{ik}du^idu^k\quad(g_{ik}=g_{ki}),$$
$$h_{ik}du^idu^k\quad(h_{ik}=h_{ki}),$$

其中，第一个为正定的．设它们的系数 g_{ik} 与 $h_{ik}(i,k=1,2)$ 满足 Codazzi 方程和 Gauss 方程，即

$$h_{rs;t}-h_{rt;s}=0, \tag{1}$$

$$R_{rqts}=h_{rt}h_{sq}-h_{rs}h_{tq}, \tag{2}$$

则必存在曲面 S，使它的第一基本形式和第二基本形式分别是上列已知的两微分形式，而且满足这条件的所有曲面在运动群下互相重合．式中，共变微分是关于第一微分形式作成的．

本定理最初为 O. Bonnet 所发现，称为曲面论的基本定理．由这定理我们知道，两个曲面 S 及 $\bar{S}$ 经过运动能互相重合的充分必要条件是：它们具有相同的第一基本形式和第二基本形式．

证明 假如所求的曲面 S 存在，则它的位置向量 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2))$ 以及单位法向量 $\boldsymbol{n}(u^1,u^2)=(X(u^1,u^2),Y(u^1,u^2),Z(u^1,u^2))$必须满足下列的微分方程系统

$$\boldsymbol{r}_{r,s}=h_{rs}\boldsymbol{n}, \tag{I}$$

$$\boldsymbol{n}_i=-g^{pk}h_{ik}\boldsymbol{r}_p. \tag{II}$$

于是必须阐明两组方程(I)与(II)在条件(1)与(2)之下是可积分的，从而证明了S的存在性.

我们引入辅助未知函数$P_i,Q_i,R_i(i=1,2)$. 令$\boldsymbol{r}_i=(P_i,Q_i,R_i)$，这样一来我们可把(I)、(II)改写为含$x,y,z$; X,Y,Z; P_1,Q_1,R_1; P_2,Q_2,R_2等十二个未知函数的一阶线性偏微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i,\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial u^k}=\Gamma^m_{ik}\boldsymbol{r}_i+h_{ik}\boldsymbol{n},\\ \dfrac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{n}=-g^{pm}h_{mk}\boldsymbol{r}_p.\end{cases} \tag{III}$$

这个方程组的可积分条件是

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_i=\frac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{r}_k, \tag{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^l}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_i\right)=\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial}{\partial u^l}\boldsymbol{r}_i\right), \tag{ii}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^l}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{n}\right)=\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial}{\partial u^l}\boldsymbol{n}\right). \tag{iii}$$

因为$\Gamma^m_{ik}=\Gamma^m_{ki}$, $h_{ik}=h_{ki}$，所以(i)恒成立. 然而(ii),(iii)则不然，必须按照上节的方法来求. 通过直接计算之后，我们容易验证所求到的条件仍然是(1)和(2). 因此，在(1),(2)成立的假定下，系组(III)是可积分的.

要注意的是我们欲求的是一个曲面S，除了它是点$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2))$的轨迹之外，它的单位法向量应是$\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$，而且第一与第二基本形式分别为$g_{ik}du^idu^k$与$h_{ik}du^idu^k$. 换句话说$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{n}=(X,Y,Z)$除了必须满足方程组(III)以外，还要满足附带条件，即

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1,\quad \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^i}\boldsymbol{r}=0,\ \frac{\partial}{\partial u^i}\cdot\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}=g_{ik},$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^i\partial u^k}=h_{ik}.$$

我们把它们改写为

(α)　$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1,$

(β)　$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=0,$

(γ)　$\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_k=g_{ik},$

(δ)　$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_i=h_{ik}.$

然而从(III)，(α)与(β)我们得到

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_i=\Gamma^m_{ik}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_m+h_{ik}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=h_{ik},$$

所以条件(δ)是自然的结果．这样一来，所讨论的问题就化为如下较简单的形式：

决定系统(III)的解$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{n}=(X,Y,Z)$，使其满足条件(α)，(β)和(γ)．

条件(α)，(β)，(γ)的总数为六，而未知函数也有六个，所以对任何给定的(u^1,u^2)一对值，例如$(0,0)$，常可求出满足这六个条件的$\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{n}_0=(X_0,Y_0,Z_0)$．对于这给定的初始条件，则(III)就必定有唯一解$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，$\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$，使得

$$\boldsymbol{r}(0,0)=\boldsymbol{r}_0,\quad \boldsymbol{n}(0,0)=\boldsymbol{n}_0.$$

如果我们能证明这组解对任何参数值(u^1,u^2)也满足条件(α)，(β)，(γ)，则基本定理的第一部分也就成立．

注意到$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$，$\boldsymbol{n}(u^1,u^2)$在$(0,0)$点已满足(α)，(β)，(γ)，所以我们只要证明下列的事实就可以了：

关于u^1,u^2微分(α)，(β)，(γ)时，所得的方程式必为(α)，(β)，(γ)和(III)的必然结果．

例如，在证明(α)时，只要证明 $\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^l}\boldsymbol{n}=0$ 即可．实际上，这时 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=$常数，而又已知 $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})|_{(0,0)}=\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n}_0=1$，所以这个常数等于 1，于是便得到(α)．其他条件都可依此类推．

1° **关于 u^k 微分(α)，结果应是**

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{n}=0.$$

根据(III)和(β)，可证其成立．

2° **关于 u^k 微分(β)，结果应是**

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_i=0.$$

然而依照(III)，(α)，(β)及(γ)，

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i=-g^{pm}g_{pi}h_{mk}=-h_{ik},$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_i=h_{ik},$$

所以成立

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial u^k}\boldsymbol{r}_i=0.$$

3° **关于 u^l 微分(γ)，结果应是**

$$\frac{\partial}{\partial u^l}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_k+\frac{\partial}{\partial u^l}\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{r}_i=\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}.$$

根据(III)，(β)，(γ)可改写为

$$\Gamma_{il;k}+\Gamma_{kl;i}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}.$$

然而这确实是成立的(§25.4，(8))，所以前式可由(III)，(β)，(γ)导出．

由此看到，所求的曲面 S 必定存在．

现假定我们已求出作为偏微分方程组(III)的解的两个曲面．

将两曲面作适当的运动，使它所对应的向量函数

$$\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{n}\quad 与\quad \overline{\boldsymbol{r}}_1,\ \overline{\boldsymbol{r}}_2,\ \overline{\boldsymbol{n}}$$

在$(u^1,u^2)=(u_0^1,u_0^2)$完全一致，则这两组向量函数对任何的(u^1,u^2)都是一致的．其实$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}$与$\overline{\boldsymbol{r}}_1,\overline{\boldsymbol{r}}_2,\overline{\boldsymbol{n}}$这两组向量函数都是(III)的后两组方程的解，它们又满足同一组初始条件，所以根据微分方程理论中解的唯一性得知，它们对所有的值(u^1,u^2)也必一致．对$\boldsymbol{r}_i=\overline{\boldsymbol{r}}_i$进行积分，则$\boldsymbol{r}=\overline{\boldsymbol{r}}+$常向量．因此，两曲面是完全一致的．

证毕．

习　题

1．设两曲面的总曲率都取正值，并且以法线平行的两点互相对应．如果这个对应是保角对应，则这两曲面必定相位似．

2．设两曲面的总曲率都取正值，并且以法线平行的两点互相对应．如果这对应为渐近线对应，也就是两对虚的渐近方向互相对应，则这两曲面必定相位似．

3．如果两曲面的基本量E,F,G；L,M,N与$\overline{E},\overline{F},\overline{G}$；$\overline{L},\overline{M},\overline{N}$之间存在关系

$$\overline{E}=E,\ \overline{F}=F,\ \overline{G}=G,$$
$$\overline{L}=-L,\ \overline{M}=-M,\ \overline{N}=-N,$$

则这两曲面的位置是对称的．

又如果存在一个正的常数a，使得

$$\overline{E}=a^2E,\ \overline{F}=a^2F,\ \overline{G}=a^2G,$$
$$\overline{L}=aL,\ \overline{M}=aM,\ \overline{N}=aN,$$

则这两曲面为相似．

4．问第三基本形式和第二基本形式

$$edu^2+2fdudv+gdv^2,\quad Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$$

满足何种条件时，除相差一个运动外完全可决定一个曲面，使它的第三及第二基本形式分别为上列二形式．

§ 28. 曲面变形论

1. 定义

设两曲面S与$\bar{S}$的点互相对应，并且在对应点的线素相等，则S与$\bar{S}$称作**互为变形**.

记$S,\bar{S}$的参数表示分别为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v));$$
$$\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{u},\bar{v})=(\bar{x}(\bar{u},\bar{v}),\bar{y}(\bar{u},\bar{v}),\bar{z}(\bar{u},\bar{v})),$$

并用

$$\begin{cases}\bar{u}=\bar{u}(u,v)\\ \bar{v}=\bar{v}(u,v)\end{cases} \tag{1}$$

表示两曲面上的点对应. 按定义,S与$\bar{S}$互为变形的充要条件是: 在对应(1)之下,

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$
$$d\bar{s}^2=\bar{E}d\bar{u}^2+2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v}+\bar{G}d\bar{v}^2$$

相等.

假设S与$\bar{S}$互为变形，如果我们按照(1)在$\bar{S}$上作参数变换的话，那么两曲面上的对应点就可用同一组参数u,v表示，就是说,这时可做到$\bar{u}=u,\bar{v}=v$. 于是我们就有

$$\bar{E}=E,\bar{F}=F,\bar{G}=G.$$

再根据Gauss公式(§23.1)知道，*互为变形的两曲面在对应点的总曲率必定相等*.

然而自然的问题是： 这个必要条件是否也是充分的呢?我们将证明:即使两曲面在对应点有相等的总曲率$K(u,v)=\bar{K}(\bar{u},\bar{v})$，这两曲面未必互为变形.

Stäckel-Wangerin的例题.

设两曲面为

$$S:\ \boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\ln u);$$

$$\bar{S}:\ \bar{\boldsymbol{r}}(\bar{u},\bar{v})=(\bar{u}\cos\bar{v},\bar{u}\sin\bar{v},\bar{v}),$$

则它们的线素分别为

$$ds^2=\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du^2+u^2dv^2,$$

$$d\bar{s}^2=d\bar{u}^2+(1+\bar{u}^2)d\bar{v}^2;$$

总曲率分别等于

$$K=-\frac{1}{(1+u^2)^2},\quad \bar{K}=-\frac{1}{(1+\bar{u}^2)^2}.$$

现在两曲面间如有对应，使在对应点有 $K(u,v)=\bar{K}(\bar{u},\ \bar{v})$ 的话，则这对应必满足下列两个关系之一，即

$$\text{(i)}\ \bar{u}=\pm u,\qquad \text{(ii)}\ \bar{u}^2=-2-u^2.$$

如果我们能证明，对于任何使 $K=\bar{K}$ 的对应 $\bar{v}=\varphi(u,\ v)$，决不能使 $ds^2=d\bar{s}^2$，那就可以断言 S 与 $\bar{S}$ 不互为变形.

(i) 设 $\bar{u}=\pm u,\bar{v}=\varphi(u,v)$，且

$$d\bar{s}^2=du^2+(1+u^2)(\varphi_u du+\varphi_v dv)^2=ds^2,$$

则就应该成立

$$1+(1+u^2)\varphi_u^2=1+\frac{1}{u^2},$$

$$\varphi_u\varphi_v=0,$$

$$\varphi_v^2(1+u^2)=u^2.$$

但是第一及第三方程表示 $\varphi_u\varphi_v\neq 0$，与第二方程矛盾. 所以函数 $\varphi(u,v)$ 不存在.

(ii) 设 $\bar{u}^2=-2-u^2$，$\bar{v}=\varphi(u,v)$ 且 $ds^2=d\bar{s}^2$. 同样可以证明不存在这样的 φ.

2. 变形论第一问题

已知两曲面 S 与 $\bar{S}$ 时，如何决定它们互为变形的充分必要条

件，就是所谓的变形论第一问题. 这问题最初是由 Minding 提出(1839)并加以解决的.

下面我们先来证明一条引理.

在曲面上作参数变换

$$\bar{u}=\varphi(u,v),\bar{v}=\psi(u,v)$$

时，它的线素

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

就化为如下形式

$$\frac{\nabla\psi\cdot d\varphi^2-2\nabla(\varphi,\psi)d\varphi d\psi+\nabla\varphi\cdot d\psi^2}{\nabla\varphi\nabla\psi-\nabla(\varphi,\psi)^2}$$

实际上，设变后的线素形式为

$$ds^2=E_1d\varphi^2+2F_1d\varphi d\psi+G_1d\psi^2,$$

则关于前后两形式所作的 Beltrami 第一阶微分参数应该相同(§20.2, §25.5)，于是我们应有

$$\nabla\varphi=\bar{\nabla}\varphi=\frac{G_1}{E_1G_1-F_1^2},\quad \nabla\psi=\bar{\nabla}\psi=\frac{E_1}{E_1G_1-F_1^2},$$

$$\nabla(\varphi,\psi)=\bar{\nabla}(\varphi,\psi)=-\frac{F_1}{E_1G_1-F_1^2},$$

$$\nabla\varphi\nabla\psi-\nabla(\varphi,\psi)^2=\frac{1}{E_1G_1-F_1^2},$$

所以

$$E_1=\frac{\nabla\psi}{\nabla\varphi\nabla\psi-\nabla(\varphi,\psi)^2},$$

$$F_1=-\frac{\nabla(\varphi,\psi)}{\nabla\varphi\nabla\psi-\nabla(\varphi,\psi)^2},$$

$$G_1=\frac{\nabla\varphi}{\nabla\varphi\nabla\psi-\nabla(\varphi,\psi)^2}.$$

根据这条引理我们容易知道下列结果：

若两曲面互为变形，则必存在两对函数 $\varphi(u,v),\psi(u,v)$；

$\bar{\varphi}(\bar{u},\bar{v}),\bar{\psi}(\bar{u},\bar{v})$，使得在对应

$$\varphi(u,v)=\bar{\varphi}(\bar{u},\bar{v}),\ \psi(u,v)=\bar{\psi}(\bar{u},\bar{v}) \tag{1}$$

之下，成立关系式

$$\nabla\varphi=\bar{\nabla}\bar{\varphi},\ \nabla\psi=\bar{\nabla}\bar{\psi},\ \nabla(\varphi,\psi)=\bar{\nabla}(\bar{\varphi},\bar{\psi}), \tag{2}$$

且其逆亦真．换句话说，如有四函数 $\varphi,\psi;\bar{\varphi},\bar{\psi}$ 满足条件(2)，则两曲面必互为变形．条件(2)中的∇，$\bar{\nabla}$分别表示关于 $S,\bar{S}$ 的线素而作的 Beltrami 第一阶微分参数．

上述结果仅是两曲面互为变形定义的一种等价形式，还不能算作为第一问题的解答．当两曲面 $S,\bar{S}$ 为给定时，要回答 $S,\bar{S}$是否互为变形这问题的关键是应该如何决定这样的两对函数．

我们已经知道 $S,\bar{S}$ 互为变形的一个必要条件是

$$K(u,v)=\bar{K}(\bar{u},\bar{v}), \tag{3}$$

所以其中的两个函数我们可以取成是

$$\varphi(u,v)=K(u,v),\bar{\varphi}(\bar{u},\bar{v})=\bar{K}(\bar{u},\bar{v}),$$

于是(2)的第一个方程就有形式

$$\nabla K(u,v)=\bar{\nabla}\bar{K}(\bar{u},\bar{v}). \tag{4}$$

如果(3)与(4)**互为独立**，即

$$\nabla K=f(K),\bar{\nabla}\bar{K}=f(\bar{K})$$

不同时成立时，我们就可以采用这二函数作为

$$\psi(u,v)=\nabla K(u,v),\bar{\psi}(\bar{u},\bar{v})=\bar{\nabla}\bar{K}(\bar{u},\bar{v}),$$

从而按照(3)、(4)定义所讨论的两曲面之间的点对应．这时，两曲面互为变形的充要条件如下：

$$\nabla(\nabla K)=\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{K}),\nabla(K,\nabla K)=\bar{\nabla}(\bar{K},\bar{\nabla}\bar{K}),$$

如果(3)与(4)**函数相关**，即

$$\nabla K=f(K),\bar{\nabla}\bar{K}=f(\bar{K}) \tag{5}$$

同时成立，那么我们就必须另取 ψ，$\bar{\psi}$才能继续进行．由(3)当然可得

$$\Delta K = \bar{\Delta}\bar{K}, \tag{6}$$

这里的 Δ, $\bar{\Delta}$分别表示关于 S, $\bar{S}$ 的线素而作的 Beltrami 第二阶微分参数(§ 20. 3).

如果(3)与(6)**互为独立**,我们可取

$$\psi = \Delta K(u, v), \bar{\psi} = \bar{\Delta}\bar{K}(\bar{u}, \bar{v}),$$

从而按照方程(3),(6)定义两曲面间的对应. 这时,两曲面互为变形的条件便是

$$\nabla(\Delta K) = \bar{\nabla}(\bar{\Delta}\bar{K}), \nabla(K, \Delta K) = \bar{\nabla}(\bar{K}, \bar{\Delta}\bar{K}).$$

我们尚须考虑的便是(3)与(4),(3)与(6) 都是**函数相关**的情形. 换句话说:

$$\nabla K = f(K), \bar{\nabla}\bar{K} = f(\bar{K}),$$
$$\Delta K = h(K), \bar{\Delta}\bar{K} = h(\bar{K}) \tag{7}$$

同时成立. 然而,我们可以证明: *两曲面 S, $\bar{S}$ 在条件(3), (7)之下总是互为变形的.*

为导出最后这一结论,先叙述

引理 *任何曲面必有两参数 φ, ψ, 使它的线素具有形式*

$$ds^2 = \lambda(d\varphi^2 + d\psi^2), \tag{8}$$

式中 $\lambda = \lambda(\varphi, \psi)$.

这种 φ, ψ 称为曲面的**等温参数**,它的存在性已见于前(§ 18. 1,公式(6)). 现在我们将用别的方法证明于下.

如所求的 φ, ψ 存在,则

$$\Delta\varphi = 0,$$

这是由于 $\Delta\varphi = \bar{\Delta}\varphi = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right)\varphi \equiv 0.$

在曲面上取一族曲线 $\omega(u, v) =$ 常数,并令

$$\varphi = f(\omega),$$

于是 $\varphi =$ 常数与 $\omega =$ 常数就表示同一族曲线. 但是

$$\Delta\varphi=g^{ik}\varphi_{ik}=g^{ik}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^i\partial u^k}-\Gamma^l_{ik}\varphi_l\right\}$$

$$=g^{ik}\left[f'(\omega)\frac{\partial^2\omega}{\partial u^i\partial u^k}+f''(\omega)\omega_i\omega_k-\Gamma^l_{ik}f'(\omega)\omega_l\right]$$

$$=f'(\omega)\left[g^{ik}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial u^i\partial u^k}-\Gamma^l_{ik}\omega_l\right)\right]+f''(\omega)g^{ik}\omega_i\omega_k$$

$$=f'(\omega)\Delta\omega+f''(\omega)\nabla\omega=0,$$

所以必须求 $f(\omega)$，使它满足

$$\frac{f''(\omega)}{f'(\omega)}=-\frac{\Delta\omega}{\nabla\omega}. \tag{9}$$

如此决定函数 $\varphi=f(\omega)$之后，我们再取曲面上的曲线族 $\psi(u,v)=$常数，使它与 $\varphi(u,v)=$常数直交. 因现在$\Delta\varphi=0$ 就是(§20.3,(3))

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G\omega_u-F\omega_v}{\sqrt{EG-F^2}}f'(\omega)\right]=\frac{\partial}{\partial v}\left[-\frac{E\omega_v-F\omega_u}{\sqrt{EG-F^2}}f'(\omega)\right],$$

所以一定存在 $\psi(u,v)$，使得

$$\psi_u=-\frac{E\omega_v-F\omega_u}{\sqrt{EG-F^2}}f'(\omega),$$
$$\psi_v=\frac{G\omega_u-F\omega_v}{\sqrt{EG-F^2}}f'(\omega). \tag{10}$$

这时我们便有

$$\nabla(\varphi,\psi)=\frac{1}{EG-F^2}\left[(E\varphi_v-F\varphi_u)\psi_v+(G\varphi_u-F\varphi_v)\psi_u\right]$$
$$=\frac{f'(\omega)}{EG-F^2}\left[(E\omega_v-F\omega_u)\psi_v+(G\omega_u-F\omega_v)\psi_u\right]=0.$$

所以经参数变换$(u,v)\to(\varphi,\psi)$之后，线素化为

$$ds^2=\frac{d\varphi^2}{\nabla\varphi}+\frac{d\psi^2}{\nabla\psi}.$$

这表示所求得的曲线族$\psi(u,v)=$常数与曲线族$\varphi(u,v)=$常数直交.

又因为

$$\nabla\varphi=\nabla f(\omega)=f'^2(\omega)\nabla\omega,$$

$$\nabla\psi=-\frac{f'^2(\omega)}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & F & F\omega_u-E\omega_v \\ F & G & G\omega_u-F\omega_v \\ F\omega_u-E\omega_v & G\omega_u-F\omega_v & 0 \end{vmatrix}$$

$$=f'^2(\omega)\frac{G\omega_u^2-2F\omega_u\omega_v+E\omega_v^2}{EG-F^2}=f'^2(\omega)\nabla\omega,$$

所以 $\nabla\varphi=\nabla\psi$. 如果用$\frac{1}{\lambda}$表示这个公共值,则

$$ds^2=\lambda(d\varphi^2+d\psi^2),$$

这就是想证的结果. 证毕.

现在我们应用这条引理到(3)、(7)都成立的两曲面 S, $\bar{S}$. 取 $\omega=K(u,v)$,则

$$\nabla\omega=\nabla K=f(K),$$

$$\Delta\omega=\Delta K=h(K),$$

于是$\frac{\nabla\omega}{\Delta\omega}=\frac{f(K)}{h(K)}$仅仅是 $\omega=K$的函数. 所以(9)的解为

$$f'(\omega)=e^{-\int\frac{h(K)}{f(K)}dK}.$$

这样,曲面 S 的线素便被表成

$$ds^2=\frac{1}{\nabla K}\left[dK^2+e^{2\int\frac{h(K)}{f(K)}dK}d\psi^2\right]. \tag{11}$$

根据同样的计算以及(7)式,我们得到 $\bar{S}$ 的线素:

$$d\bar{s}^2=\frac{1}{\bar{\nabla}\bar{K}}\left[d\bar{K}^2+e^{2\int\frac{h(\bar{K})}{f(\bar{K})}d\bar{K}}d\bar{\psi}^2\right]. \tag{12}$$

由此断定:两曲面在对应

$$K(u,v)=\bar{K}(u,v),\ \psi(u,v)=\bar{\psi}(\bar{u},\bar{v})$$

之下,$ds^2=d\bar{s}^2$. 所以 S 与 $\bar{S}$ 互为变形.

另外,从形式(11)与(12)我们容易证明,**这时各曲面都与一旋**

转面互为变形. 其实，若设

$$r^*=(p(u^*)\cos v^*, p(u^*)\sin v^*, q(u^*))$$

是旋转面的参数表示式，且取 u^* 使得

$$p'^2(u^*)+q'^2(u^*)=1,$$

则旋转面的线素就是

$$ds^{*2}=du^{*2}+p'^2(u^*)dv^{*2}=p'^2(u^*)\left[\left(\frac{du^*}{p'(u^*)}\right)^2+dv^{*2}\right],$$

由此显见它与 S 或 $\bar{S}$ 互为变形.

3. 变形论第二问题

已知一曲面时，如何决定它所有的变形曲面？这就是变形论的第二问题. 这个问题曾成为许多数学家的研究目标，尤其是 Weingarten(1861, 1896) 的工作更为引人注目. 但这问题至今尚未完全解决，以下我们仅叙述这问题的梗概.

以已知曲面的线素

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

作为基本二次形式，我们可以定义一个函数 $\varphi(u,v)$ 的二阶共变导数 $\varphi_{ik}=\varphi_{i,k}$. 令

$$\Delta_{22}\varphi=\frac{\varphi_{11}\varphi_{22}-\varphi_{12}^2}{EG-F^2},$$

并设所论曲面的坐标分量函数为 x, y, z，我们便有

$$\begin{aligned}\Delta_{22}x&=K(1-\nabla x),\\ \Delta_{22}y&=K(1-\nabla y),\\ \Delta_{22}z&=K(1-\nabla z),\end{aligned}\tag{1}$$

式中的 K 为曲面的总曲率，而 ∇ 则表示关于所取基本形式的第一阶微分参数.

为了证明公式(1)，首先注意曲面的位置向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 与

单位法向量 $n=(X,Y,Z)$ 之间有如下关系:

$$r_{i,j}=h_{ij}n.$$

于是逐一计算后便得到

$$\Delta_{22}x=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}X^2,$$

$$\Delta_{22}y=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}Y^2,$$

$$\Delta_{22}z=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}Z^2.$$

所以问题归结为对下列等式的证明,即:

$$1-\nabla x=X^2,1-\nabla y=Y^2,1-\nabla z=Z^2. \tag{2}$$

为了方便起见,把曲面上的曲率线取为 u,v 参数曲线,这时

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2,\nabla\varphi=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2.$$

因此,

$$\begin{aligned}1-\nabla x&=\frac{E-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}{E}-\frac{1}{G}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\\&=\frac{1}{E}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\}-\frac{1}{G}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\\&=\frac{1}{EG}\left[\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right.\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right\}\\&\quad\left.-\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\}\right]\\&=\frac{1}{EG}\left[\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right\}\right.\\&\quad\left.-\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right].\end{aligned}$$

然而

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

所以

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

因此

$$1-\nabla x=\frac{1}{EG}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=X^2.$$

依同理可证得其他两式.

如果我们将曲面的方程写成 Monge 形式

$$z=f(x,y),$$

则函数 z 自然就应满足

$$\Delta_{22}z=K(1-\nabla z). \tag{I}$$

(I)称为**变形论的第一方程**.

如我们采用常用的记号

$$p=\frac{\partial f}{\partial u},\ q=\frac{\partial f}{\partial v};\ r=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

并具体写出

$$z_{11}=r-\Gamma_{11}^1 p-\Gamma_{11}^2 q,$$

$$z_{12}=s-\Gamma_{12}^1 p-\Gamma_{12}^2 q,$$

$$z_{22}=t-\Gamma_{22}^1 p-\Gamma_{22}^2 q.$$

这样,便可改写(I)为

$$(r-\Gamma_{11}^1 p-\Gamma_{11}^2 q)(t-\Gamma_{22}^1 p-\Gamma_{22}^2 q)-(s-\Gamma_{12}^1 p-\Gamma_{12}^2 q)^2$$
$$=K[EG-F^2-(Eq^2-2Fpq+Gp^2)]. \tag{I*}$$

这是关于

$$r,s,t,rt-s^2$$

一次的方程,即所谓 Monge-Ampère 型的方程.

当一曲面为已知时,E、F、G 都是 u, v 的已知函数,并且它们

与 L、M、N 一起满足 Gauss 方程和两个 Codazzi 方程. 但如果我们希望决定这曲面的变形曲面，那么变形曲面的 E、F、G 还是已知的，而它的 L、M、N 就必须满足这三个方程.

但根据上文讨论的结果来看，这问题归结于 Monge-Ampère 型方程(I*)的求解. 对于给定的函数 E、F、G，一般无法决定(I*)的解 z，所以变形论第二问题便成为难题了.

Darboux 曾对(I)作了如下的解释.

如果 z 为方程(I)的任何解，则二次微分形式

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2-dz^2$$

的曲率必等于零，且其逆亦真.

为证明方便起见，取曲面的参数 $u=z$，并选参数曲线 $v=$ 常数与 $u=$ 常数使其构成直交系统，于是 $F=0$. 那么，我们就可改写 (I*)

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{22}^1-(\Gamma_{12}^1)^2=G(E-1)K.$$

为按照 $F=0$ 和 § 26. 1，公式(2)得出

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u},\ \Gamma_{12}^1=\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v},\ \Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u},$$

所以

$$\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2+4E^2G(E-1)K=0. \tag{3}$$

另一方面，根据 Gauss 公式(§ 23. 1)又有

$$4E^2G^2K=E\left\{\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right\}+G\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right\}$$
$$-2EG\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right). \tag{4}$$

把(4)代入(3)式，

$$G\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right\}+E(E-1)\left\{\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right\}$$
$$+G(E-1)\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right\}-2EG(E-1)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)$$

$=0,$

整理后两边除以E可得

$$(E-1)\left\{\frac{\partial E}{\partial v}\ \frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right\}+G\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\ \frac{\partial G}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right\}$$

$$-2(E-1)G\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)=0.$$

当上式左侧的因子$(E-1)$被换为E时我们便得到(4)的右侧. 所以最后的等式恰恰表明了二次微分形式

$$(E-1)du^2+Gdv^2$$

的曲率等于零,这就是所要证明的事实.

现假定方程(I)的一个解$z(u,\ v)$为已知, 要问: 以所给定的$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$为线素的**实曲面**是否存在?

如所求的曲面存在,则必有两个函数$x(u,v)$,$y(u,v)$使得(x, y亦为(I)的解)

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2-dz^2=dx^2+dy^2,$$

且其逆亦真,因为这时dx^2+dy^2的曲率正好为零.

由于上式右侧的形式为正定,所以

$$\left[E-\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\cdot\left[G-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]-\left[F-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2>0, \tag{5}$$

或改写为

$$\nabla z<1. \tag{5*}$$

这条件不仅是必要,也是充分的. 实际上,取正交的参数曲线$u, v, F=0$,从而(5)可被改成

$$EG-E\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2-G\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2>0,$$

也就是

$$E\left[G-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]>G\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G\left[E-\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]>E\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

于是我们得到

$$E-\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2>0, \qquad G-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2>0.$$

这两者和(5) 一起正好是使 $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2-dz^2$ 为正定的条件.

由此我们看到，若 z 是(I)的一个解，而且它满足条件(5*)，则必存在以 ds^2 为线素的实曲面 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 注意到 ds^2-dz^2 为正定的，且具有零 Gauss 曲率的事实，我们就可以用积分决定 x 与 y (参阅 § 22.1). 这样，我们证明了下列

定理 若 z 为变形论第一方程的任何一解，且满足 $\nabla z<1$，则必存在一个而且仅有一个以 ds^2 为线素的曲面. 从已知解 z 出发，单用积分便可求出所求的曲面.

下面，我们将用曲面论基本方程(§ 26)来给出上述定理的另一个证明.

根据 § 26.2 的公式(I)，

$$z_{11}=LZ,\ z_{12}=MZ,\ z_{22}=NZ,$$

代入(2)，

$$\nabla z=1-Z^2,$$

于是

$$L=\frac{z_{11}}{\sqrt{1-\nabla z}},\ M=\frac{z_{12}}{\sqrt{1-\nabla z}},\ N=\frac{z_{22}}{\sqrt{1-\nabla z}}. \tag{6}$$

我们只须验证：已知的 E、F、G 以及由(6)决定的 L、M、N 满足 Gauss 方程和两个 Codazzi 方程.

因为函数 $z(u,v)$ 是(I)的一个解，而且 L, M, N 决定于(6)所以

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=K,$$

这就是 Gauss 方程.

其次，为了证明 L、M、N 也满足两个 Codazzi 方程，先让我们回顾一下 § 25.6 的公式(1). 设 Φ 是 $u=u^1$, $v=u^2$的任何函数，且记

$$\Phi_{ikr}=\frac{\partial\Phi_{ik}}{\partial u^r}-\Gamma^m_{i\,r}\Phi_{mk}-\Gamma^m_{k\,r}\Phi_{im},$$

我们有

$$\Phi_{ikr}-\Phi_{irk}=g^{ml}R_{imrk}\Phi_l,$$

也就是

$$\frac{\partial\Phi_{ik}}{\partial u^r}-\frac{\partial\Phi_{ir}}{\partial u^k}=\Gamma^m_{i\,r}\Phi_{mk}-\Gamma^m_{i\,k}\Phi_{mr}+g^{ml}R_{imrk}\Phi_l.$$

然而依照 § 26.3,

$$R_{1212}=K(EG-F^2),$$

所以我们适当选取指标 i,k,r 以后可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial v}-\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial u}&=K\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial u}-E\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)+\Gamma^1_{12}\Phi_{11}\\&\quad+(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})\Phi_{12}-\Gamma^2_{11}\Phi_{22},\\\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial u}-\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial v}&=K\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial v}-G\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)-\Gamma^1_{22}\Phi_{11}\\&\quad+(\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{22})\Phi_{12}+\Gamma^2_{12}\Phi_{22}.\end{aligned}\tag{7}$$

另一方面，根据 § 25.5 的公式(12),

$$\nabla\Phi=g^{ik}\Phi_i\Phi_k,$$

$$\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial u^l}=2g^{ik}\Phi_i\Phi_{kl},$$

或者

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial u}=\frac{G\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}-F\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}}{EG-F^2}\Phi_{11}+\frac{E\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}-F\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}}{EG-F^2}\Phi_{12},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial v}=\frac{G\frac{\partial\Phi}{\partial u}-F\frac{\partial\Phi}{\partial v}}{EG-F^2}\Phi_{12}+\frac{E\frac{\partial\Phi}{\partial v}-F\frac{\partial\Phi}{\partial u}}{EG-F^2}\Phi_{22}. \tag{8}$$

根据(7)与(8)我们可进行如下的计算:

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{1-\nabla z}}\left(\frac{\partial z_{11}}{\partial v}-\frac{\partial z_{12}}{\partial u}\right)$$

$$+\frac{1}{(\sqrt{1-\nabla z}\,)^3}\left(z_{11}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial\nabla z}{\partial v}-z_{12}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial\nabla z}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{K}{\sqrt{1-\nabla z}}\left(F\frac{\partial z}{\partial u}-E\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\Gamma_{12}^1\cdot L+(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)\cdot M$$

$$-\Gamma_{11}^2\cdot N+\frac{1}{(\sqrt{1-\Delta z})^3}\frac{E\frac{\partial z}{\partial v}-F\frac{\partial z}{\partial u}}{EG-F^2}(z_{11}z_{22}-z_{12}^2),$$

这就是

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}=\Gamma_{12}^1\cdot L+(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1)M-\Gamma_{11}^2\cdot N.$$

按同样的方法我们可推得

$$\frac{\partial N}{\partial u}-\frac{\partial M}{\partial v}=-\Gamma_{22}^1\cdot L+(\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^2)\cdot M+\Gamma_{12}^2\cdot N.$$

因此，已知的E、F、G以及由(6)所决定的L、M、N确实满足两个Codazzi方程.　　　　证毕

习　题

1. 若一曲面容纳本身不变的一个连续变形，则它的线素可以化为$ds^2=du^2+G(u)dv^2$的形式，且其逆亦真.

2. 证明曲面

$$r=(a(\cos u+\cos v),\ a(\sin u+\sin v),\ c(u+v))$$

与旋转面互为变形.

3. 证明曲面

$$r=(e^{\alpha}u,e^{-\alpha}v,ae^{\alpha}u^2+be^{-\alpha}v^2)$$

的总曲率与α无关，但是对不同两个α值的两个曲面不互为变形．这里的a，b，α皆为常数(Gale, 1903)．

4．线素分别为

$$ds^2=e^{2v}[du^2+a^2(1+u^2)dv^2], \qquad a^2\neq b^2.$$

$$d\bar{s}^2=e^{2v}[du^2+b^2(1+u^2)dv^2]$$

的两曲面有相等的总曲率但不互为变形．

(小倉 Ogura, 1908; 林 Hayashi, 1914)．

5．问两曲面

$$r=(u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)),$$

$$r^*=(u\cos v,\ u\sin v,\ F(u)+av)$$

在什么条件之下才能互为变形？

6．设两曲面互为变形，并且渐近曲线互相对应，则两曲面必互相重合或对称(O. Bonnet, 1867)．

7．设$U(u)$，$f(u)$仅为u的两个任何函数，而a为常数．当a改变其值时，所对应的各旋转面

$$r(u,v)=\left(aU(u)\cos\frac{v}{a},\ aU(u)\sin\frac{v}{a},\ \int\sqrt{(1-a^2)U'^2(u)+f'^2(u)}du\right)$$

互为变形，平行环变为平行环，且子午线变为子午线．

(Minding, 1838)．

8．证明螺旋曲面

$$r(u,v)=\left(\frac{1}{n}\sqrt{g^2-l^2}\cos\{n(u+\omega)\},\ \frac{1}{n}\sqrt{g^2-l^2}\sin\{n(u+\omega)\},\right.$$
$$\left.\frac{1}{n}\ln(u+\omega)+nw\right)$$

与旋转面

$$r^*(u,v)=\left(g(v)\cos u,\ g(v)\sin u,\ \int\sqrt{1-g'^2(v)}dv\right)$$

互为变形，式中的l，n为常数，而ω，w单为v的这样函数，使得

$$\frac{d\omega}{dv}=\frac{Rl}{ng(g^2-l^2)}, \qquad \frac{dw}{dv}=-\frac{Rg}{n(g^2-l^2)},$$

$$R^2=n^2(g^2-l^2)-g^2g'^2. \qquad \text{(Bour, 1862)}$$

9．设U，V分别单为u，v的函数，且n为常数．当n改变其值时，诸曲

面

$$r(u,v)=\left(\frac{V}{n}\cos(nu)+\int U\sin(nu)\,du,\ \frac{V}{n}\sin(nu)\right.$$

$$\left.-\int U\cos(nu)\,du,\ \int\sqrt{1-\frac{V'^2}{n^2}}\,dv\right)$$

互为变形，而且曲率线变为曲率线. (Bour, 1862)

10. 设 U,V 分别单为 u,v 的函数，且 a 为常参数. 当 a 变动其值时，诸曲面

$$r(u,v)=\left(\int\sqrt{1-\frac{V'^2}{a^2}}\,dv,\ \int\sqrt{1-V'^2a^2}\,du,\ aV+\frac{V}{a}\right)$$

互为变形. (Peterson)

§ 29. 极小曲面

1. 简史

极小曲面的研究是 Lagrange(1760-1761)开创的. 原来的问题如下：

已知一条空间封闭曲线 C，试决定一个曲面 σ，使它经过 C，而且它被 C 所围成的表面积为最小.

如果用解析形式来叙述的话，就是下列问题：

设函数 $z(x,y)$ 在一领域 D 的境界上为已知，试决定此函数，使积分值

$$\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$

为最小，式中的

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

此问题的必要条件是

$$\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy=\text{极小},$$

于是我们得到条件

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0,$$

即

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0, \qquad (\alpha)$$

其中

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \qquad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

凡是满足微分方程(α)的曲面 $z=z(x, y)$ 称为**极小曲面**.

Meusnier(1776)从方程(α)得到它的几何学解释，即两个主曲率半径 R_1, R_2 的和等于 0，他还决定了形式分别为 $z=f(x^2+y^2)$ 和 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的极小曲面，这就是最早发现的两个极小曲面——悬链面和正螺面.

接着，Monge(1784)曾决定了(α)的完全积分，然而它并不适用. 在以后相当长的时间内，除了上述两极小曲面外，无人发现过其他实的极小曲面. 一直到 Scherk(1834)才开始求得(α)的形式为 $z=f(x)+\varphi(y)$ 的特殊解，所得的是新的极小曲面

$$z=\frac{1}{a}\ln\frac{\cos ax}{\cos ay}.$$

极小曲面研究的进展与 O. Bonnet(1853—1860)有紧密的联系. 人们根据他的研究才了解到一个极小曲面与它的球面表示构成保角对应. 另外，依照他的方法我们从一个已知实的极小曲面还可导出无数个实的极小曲面和代数极小曲面.

Weierstrass(1866)根据 Monge(1807)的思想，完全决定了极小曲面的最一般方程. 在这期间里，S. Lie(1877—1878)也作出重要贡献. 利用 Weierstrass 公式，便可解决许多问题. 就中尤其重要的是Plateau问题. Riemann 开始了对这问题的研究；Schwarz继续进行，他毕生的工作均与此问题有关，所得到的与正四面体四棱

所成空间四边形有关的极小曲面尤为著名. 近代数学家中, J. Douglas 对这问题的贡献特别大, 详细情形可参考 T. Rado: The Problem of Plateau(1934).

2. Weierstrass 公式

设

$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

是一个极小曲面的解析表示, 并设 $\boldsymbol{n}(u,v)=(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))$ 是曲面的单位法向量. 当由封闭曲线 C 所包围的曲面受到小扰动时, 我们先来计算它表面积的变分.

设 $\varepsilon\lambda(u,v)$ 为曲面在点 (u,v) 处沿法线方向的变差, 这里 $\lambda(u,v)$ 是点的函数, $\varepsilon>0$ 为任意正数, 且沿 C 上各点 $\lambda(u,v)=0$. 变动后的曲面是

$$\overline{\boldsymbol{r}}=(\xi,\eta,\zeta)=\boldsymbol{r}(u,v)+\varepsilon\lambda(u,v)\boldsymbol{n}(u,v).$$

为了简便起见, 我们把原曲面的曲率线取为参数曲线, 则它的线素为

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2,$$

并且 O. Rodriques 公式(§16.1, 公式(4))成立, 即

$$\boldsymbol{r}_u+R_2\boldsymbol{n}_u=0,\quad \boldsymbol{r}_v+R_1\boldsymbol{n}_v=0.$$

由此以及 $F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=0$, 我们容易得到第三基本量:

$$e=\frac{E}{R_2^2},\quad f=0,\quad g=\frac{G}{R_1^2}.$$

于是线素可改写为

$$ds^2=eR_2^2du^2+gR_1^2dv^2,$$

且曲面的表面积就是

$$A=\iint\sqrt{EG}\,du\,dv.$$

下面我们来计算扰动后曲面的面积. 先有

$$d\overline{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}_udu+\boldsymbol{r}_vdv+\varepsilon\lambda(\boldsymbol{n}_udu+\boldsymbol{n}_vdv)+\varepsilon\boldsymbol{n}d\lambda,$$

也就是

$$d\bar{r}=(\varepsilon\lambda-R_2)\boldsymbol{n}_u du+(\varepsilon\lambda-R_1)\boldsymbol{n}_v dv+\varepsilon\boldsymbol{n}d\lambda,$$

由此得到变后曲面的线素：

$$d\sigma^2=(\varepsilon\lambda-R_2)^2 e\,du^2+(\varepsilon\lambda-R_1)^2 g\,dv^2+\varepsilon^2 d\lambda^2,$$

它的第一基本量是

$$\begin{aligned}\bar{E}&=(\varepsilon\lambda-R_2)^2 e+\lambda_u^2\varepsilon^2,\\ \bar{F}&=\qquad\qquad\lambda_u\lambda_v\varepsilon^2,\\ \bar{G}&=(\varepsilon\lambda-R_1)^2 g+\lambda_v^2\varepsilon^2.\end{aligned}$$

所以

$$\iint\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\,du\,dv=$$

$$\iint\sqrt{\left(1-\frac{\varepsilon\lambda}{R_1}\right)^2\left(1-\frac{\varepsilon\lambda}{R_2}\right)^2 EG+\varepsilon^2\left\{E\lambda_v^2\left(1-\frac{\varepsilon\lambda}{R_2}\right)^2+G\lambda_u^2\left(1-\frac{\varepsilon\lambda}{R_1}\right)^2\right\}}\,du\,dv.$$

也就是

$$\iint\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\,du\,dv$$

$$=\iint\sqrt{EG}\,du\,dv-\varepsilon\iint\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\lambda\sqrt{EG}\,du\,dv+o(\varepsilon),$$

式中 $o(\varepsilon)$ 表示 ε 的高阶量.

但是原曲面是极小曲面，对任 $\varepsilon>0$ 有，

$$\iint\sqrt{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\,du\,dv-\iint\sqrt{EG}\,du\,dv\geqslant 0,$$

所以对于所有在 C 上取零值的函数 $\lambda(u,v)$ 都应成立

$$\iint\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\lambda(u,v)\sqrt{EG}\,du\,dv=0,$$

于是我们得到条件

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0,$$

即平均曲率H等于零. 这条件又可写为

$$EN-2FM+GL=0,$$

换句话说，极小曲面的渐近曲线构成直交系统.

如果我们在极小曲面上把极小曲线取为参数曲线，则

$$E=0, G=0, ds^2=2F\,du\,dv,$$

且极小曲面的微分方程就化为

$$M=0,$$

此即

$$(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)=0.$$

于是

$$\boldsymbol{r}_{uv}=a\boldsymbol{r}_u+b\boldsymbol{r}_v.$$

然而根据假定，

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=0,\quad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=0,\quad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v\neq 0,$$

所以只能是

$$a=0,\quad b=0.$$

把 $\boldsymbol{r}_{uv}=0$ 积分，我们便得到

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}(u)+\boldsymbol{B}(v),$$

式中的 $\boldsymbol{A}(u)=(A_1(u), A_2(u), A_3(u))$ 与 $\boldsymbol{B}(v)=(B_1(v), B_2(v), B_3(v))$满足条件

$$\boldsymbol{A}_u\cdot\boldsymbol{A}_u=\left(\frac{dA_1}{du}\right)^2+\left(\frac{dA_2}{du}\right)^2+\left(\frac{dA_3}{du}\right)^2=0,$$

$$\boldsymbol{B}_v\cdot\boldsymbol{B}_v=\left(\frac{dB_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dB_2}{dv}\right)^2+\left(\frac{dB_3}{dv}\right)^2=0.$$

因此，我们从极小曲线的解析表示式(§9.3)得到极小曲面的方程

$$2x=(1-u^2)f''(u)+2uf'(u)-2f(u)$$
$$+(1-v^2)g''(v)+2vg'(v)-2g(v),$$

$$2y=i(1+u^2)f''(u)-2iuf'(u)+2if(u)$$
$$-i(1+v^2)g''(v)+2ivg'(v)-2ig(v),$$
$$2z=2uf''(u)-2f'(u)+2vg''(v)-2g'(v),$$

式中的 $f(u)$, $g(v)$ 为任何函数.

如果所讨论的曲面为**实曲面**，则极小曲线参数 u,v 必为共轭复数(§14.1)，所以上列方程中的两函数 $f(u)$ 与 $g(v)$ 互为共轭复函数. 由此我们知道最一般的**实极小曲面**就按下列方程来定义：

$$x=\mathrm{Re}[(1-u^2)f''(u)+2uf'(u)-2f(u)],$$
$$y=\mathrm{Re}[i(1+u^2)f''(u)-2iuf'(u)+2if(u)],$$
$$z=\mathrm{Re}[2uf''(u)-2f'(u)],$$

或者写为

$$x=\mathrm{Re}\left[\int(1-u^2)\mathscr{F}(u)\,du\right],$$
$$y=\mathrm{Re}\left[i\int(1+u^2)\mathscr{F}(u)\,du\right],$$
$$z=\mathrm{Re}\left[2\int u\mathscr{F}(u)\,du\right].$$

式中 $\mathscr{F}(u)$ 表示 u 的任何函数，Re 则表示实数部分. 这就是 Weierstrass **公式**.

例1 $\mathscr{F}(u)=\frac{q}{2u^2}$ (q 为实数)所对应的极小曲面是**悬链面** (catenoid).

这时，

$$x=\mathrm{Re}\left[\int(1-u^2)\frac{q}{2u^2}du\right]=-\frac{q}{4}\left(u+\frac{1}{u}+v+\frac{1}{v}\right),$$
$$y=\mathrm{Re}\left[i\int(1+u^2)\frac{q}{2u^2}du\right]=+\frac{iq}{4}\left(u-\frac{1}{u}-v+\frac{1}{v}\right),$$
$$z=\mathrm{Re}\left[2\int u\cdot\frac{q}{2u^2}du\right]=\frac{q}{2}(\ln u+\ln v).$$

如果记 $u=\xi+i\eta, v=\xi-i\eta$，则能改写为

$$x=-\frac{q}{2}\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\xi,$$

$$y=-\frac{q}{2}\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\eta,$$

$$z=q\ln\sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

如果我们进而再记 $\xi=-e^{-\theta}\cos\varphi, \eta=e^{-\theta}\sin\varphi$，则得到

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(q\mathrm{ch}\theta\cos\varphi, q\mathrm{ch}\theta\sin\varphi, -q\theta),$$

这便是悬链面的标准方程式，当然我们也可把它写成

$$x^2+y^2=q^2\mathrm{ch}^2\frac{z}{q}.$$

例 2　$\mathscr{F}(u)=\frac{iq}{2u^2}$（$q$ 为实数）。所对应的极小曲面是**正螺面**（right helicoid）。

例 3　$\mathscr{F}(u)=$常数。例如 $f(u)=\frac{1}{2}u^3$。所对应的曲面称为 Enneper **极小曲面**。它的方程是

$$x=\mathrm{Re}(3u-u^3),\quad y=\mathrm{Re}(3iu+iu^3),\quad z=\mathrm{Re}(3u^2),$$

也就是

$$\boldsymbol{r}=(3\xi+3\xi\eta^2-\xi^3, \eta^3-3\eta-3\xi^2\eta, 3(\xi^2-\eta^2)).$$

这是个九次六阶的代数曲面，它的曲率线都是平面曲线，渐近曲线均为三次挠曲线。对于这个曲面，Darboux 曾有简便作图法，可参考他的著书 Leçons 第一卷。

例 4　$\mathscr{F}(u)=\frac{2(1-a^2)^{\frac{3}{2}}}{[1+a+(1-a)u^2]^2}$，$|a|<1$。这就是 Bonnet **极小曲面**。当 α, β 是曲率线参数时，它的方程是

$$\boldsymbol{r}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(a\alpha+\sin\alpha\mathrm{ch}\beta), \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}(\beta+a\cos\alpha\mathrm{sh}\beta), \cos\alpha\mathrm{ch}\beta\right).$$

这族曲面(a为参数)与Enneper曲面是曲率线为平面曲线的极小曲面,这性质也是它们的特征.

例5 $\mathscr{F}(u)=\frac{ae^{i\alpha}}{u^2}$($a$, α为实数). 所对应的曲面称为**螺旋极小曲面**(Falchi, 1896; Bianchi, Lezioni I).

例6 $\mathscr{F}(u)=(A+Bi)u^{-2+ai}$($A, B$, a为实数). 所对应的曲面称为**涡线极小曲面**(Spiral minimal surface)(Darboux, Leçons I, p. 396).

例7 $\mathscr{F}(u)=\frac{2}{1-u^4}$. 这就是Scherk**曲面**.

例8 $\mathscr{F}(u)=\frac{b}{iu^2}+ia\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^3}\right)$($a, b$为实数).

在这曲面上有无数条抛物线. $b=0$的情形可在Catalan(1855)的研究中找到;一般的情形可参阅Peche(1891)的讨论.

例9 $\mathscr{F}(u)=\frac{c}{u\sqrt{(u-\operatorname{ctg}\varepsilon)u(u+\operatorname{tg}\varepsilon)}}$.

在这曲面上有一个单参数圆周族. Riemann, Enneper, Schwarz与Peche等人先后都对它作过研究.

3. Schwarz公式

这公式实际上是Weierstrass公式的另一种形式,因为Schwarz曾应用这公式作出过重要的工作,所以用他来命名.

我们的目的是要证明下面的定理:

设在空间已知一条曲线及它上面各点的切平面(即通过曲线切线的平面),则可决定一个极小曲面,使它通过所给定的曲线,并在曲线的各点与给定的切平面相切.

凡是这种给定初值的问题一般都归于Cauchy问题,然而在这里我们特别地把它称为Björling**问题**.

现在设 u 为复数，令

$$\xi=\int\frac{1-u^2}{2}\mathscr{F}(u)\,du,$$

$$\eta=\int\frac{i(1+u^2)}{2}\mathscr{F}(u)\,du,$$

$$\zeta=\int u\mathscr{F}(u)\,du,$$

且把 ξ,η,ζ 分为实数与虚数两部分，

$$2\xi=x+ix_1,\ 2\eta=y+iy_1,\ 2\zeta=z+iz_1,$$

则 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 是一个极小曲面，而 $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 也是极小曲面.

如果我们用 u,v 表示相互共轭的复数，$\mathscr{F}(u)$ 与 $\mathscr{G}(v)$ 表示相互共轭的解析函数，则

$$x=\frac{1}{2}\int(1-u^2)\mathscr{F}(u)\,du+\frac{1}{2}\int(1-v^2)\mathscr{G}(v)\,dv,$$

$$y=\frac{i}{2}\int(1+u^2)\mathscr{F}(u)\,du-\frac{i}{2}\int(1+v^2)\mathscr{G}(v)\,dv,$$

$$z=\int u\mathscr{F}(u)\,du+\int v\mathscr{G}(v)\,dv,$$

而且，当我们分别用 $-i\mathscr{F}(u)$ 与 $i\mathscr{G}(v)$ 替换 $\mathscr{F}(u)$ 与 $\mathscr{G}(v)$ 时，便得到 x_1,y_1,z_1 的表达式.

如果在这两个极小曲面之间建立对应，使具有相同参数 (u,v) 的点相互对应，则在对应点有平行的法向量

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{u+v}{1+uv},\frac{i(v-u)}{1+uv},\frac{uv-1}{1+uv}\right),$$

于是

$$\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}_1=0.$$

另外根据 ξ,η,ζ 的定义我们知道

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=0,$$

所以

$$d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1,\quad d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}_1=0,$$

因此

$$d\boldsymbol{r}_1=\lambda(d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}),$$

其中 λ 是待定的因子. 然而注意到

$$(d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\cdot(d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})=(d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})-(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$$
$$=d\boldsymbol{r}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1,$$

我们知道 $\lambda=\pm1$, 于是

$$d\boldsymbol{r}_1=\pm(d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}).$$

如果我们适当选取第一个曲面法线的正方向，不妨假定上式右侧的符号取正号,从而

$$\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)=\int d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$$
$$=\left(\int Z\,dy-Y\,dz,\ \int X\,dz-Z\,dx,\ \int Y\,dx-X\,dy\right).$$

由此我们得到,一个极小曲面的三个坐标分量函数为

$$\bar{x}=\mathrm{Re}(2\xi)=\mathrm{Re}\left[x+i\int Z\,dy-Y\,dz\right],$$

$$\bar{y}=\mathrm{Re}(2\eta)=\mathrm{Re}\left[y+i\int X\,dz-Z\,dx\right],$$

$$\bar{z}=\mathrm{Re}(2\zeta)=\mathrm{Re}\left[z+i\int Y\,dx-X\,dy\right].$$

这就是 Schwarz 公式.

设所给定挠曲线 C 的各点坐标 x,y,z 以及它切平面单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的分量 X, Y, Z 都是实变数 t 的**正则函数**. 经解析延拓之后,x,y,z,X, Y, Z 在复变数 τ 的某个领域内都是 τ 的解析函数. 如果把这六个函数代入 Schwarz 公式,我们便得到一个极小曲面. 特别当 τ 取实数值时,曲面上的点即为 C 的点$(x(t),y(t),z(t))$, 也就是通过 C; 而且在 C 的各点，曲面是与法方向 $\boldsymbol{n}=(X(t),Y(t),Z(t))$的给定平面相切.

由上可见,Schwarz 公式给出了Björing问题的解答. Schwarz 还把这公式用于下列两定理的证明.

定理 I 如果有一条直线落在某极小曲面上，则此曲面必定关于这条直线对称.

证明 如果把这条直线取为 z 轴,则沿这直线我们有

$$Z=0,$$

且 X,Y 都是 t 的正则函数. 由于直线的方程可写为

$$x=0,\ y=0,\ z=t,$$

如今又有 $X^2+Y^2=1$,所以沿 z 轴

$$X=\cos\sigma(t), Y=\sin\sigma(t), Z=0$$

都是实函数. 现在把 t 视为复变数并作

$$\bar{x}=\mathrm{Re}\left[-i\int\sin\sigma(t)dt\right],$$

$$\bar{y}=\mathrm{Re}\left[i\int\cos\sigma(t)dt\right],$$

$$\bar{z}=\mathrm{Re}[t],$$

那么我们就得到一个经过 z 轴的极小曲面.

当 t 取实数值时,

$$\int\sin\sigma(t)dt,\ \int\cos\sigma(t)dt$$

都是实数,而对于复数值 $t=\tau$ 及其共轭复数值 $t=\bar{\tau}$,积分

$$\int\sin\sigma(t)dt$$

所对应的两值也为共轭复数,于是

$$\mathrm{Re}\left[-i\int\sin\sigma(t)dt\right]$$

的两值只相差一个符号而已. 同理可说明积分的实部

$$\mathrm{Re}\left[i\int\cos\sigma(t)dt\right]$$

对应的两值也只相差一个符号. 然而 $\mathrm{Re}(\bar{\tau})=\mathrm{Re}(\tau)$, 所以曲面上对应于 $t=\tau$ 与 $t=\bar{\tau}$ 的两点, 关于 z 轴是有对称位置的.

定理 II 若一平面与一个极小曲面直角相交, 则这平面必定为曲面的对称平面.

证明 如果我们把这平面取为 $z=0$, 则平面与极小曲面交线的方程是

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=0.$$

根据假定, 沿交线各点的切平面必定与 z 轴平行, 所以

$$X=X(t), Y=Y(t), Z=0.$$

当 t 为实变数时, 式中的 $x(t), y(t); X(t), Y(t)$ 都是 t 的**正则实函数**. 根据 Schwarz 公式,

$$\bar{x}=\mathrm{Re}[x(t)],$$

$$\bar{y}=\mathrm{Re}[y(t)],$$

$$\bar{z}=\mathrm{Re}\left[i\int(x'Y-y'X)\,dt\right]$$

就决定了所讨论的极小曲面. 但是, 对于一个复数值 $t=\tau$ 及其共轭复数值 $t=\bar{\tau}$, 函数 $x(t)$, $y(t)$ 各取共轭复数值, 函数 $x'Y-y'X$ 也是这样. 因此, 所对应的曲面上点的坐标 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 分别取相等的值 $\mathrm{Re}[x(\tau)]=\mathrm{Re}[x(\bar{\tau})]$, $\mathrm{Re}[y(\tau)]=\mathrm{Re}[y(\bar{\tau})]$, 而第三个坐标 $\bar{z}$ 的两值只相差一个符号. 所以 τ 与 $\bar{\tau}$ 所对应的曲面上两点关于 $z=0$ 为对称. 证毕.

例 1 决定一个极小曲面, 使它通过 z 轴, 并且在其上各点与抛物面 $z=\alpha\dfrac{y}{x}$ 相切.

解 抛物面 $z=\alpha\dfrac{y}{x}$ 的单位法向量分量是

$$X=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad Y=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad Z=-\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\alpha\frac{y}{x^2},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\alpha}{x}.$$

于是我们得到

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} X=-\frac{z}{\sqrt{\alpha^2+z^2}},\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} Y=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+z^2}},\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} Z=0.$$

如果用 $x=0, y=0, z=\alpha i\sin t$ 来表示 z 轴，则在其上各点有

$$X=-i\,\mathrm{tg}\,t,\ Y=\sec t,\ Z=0.$$

因而按照 Schwarz 公式，我们得到所求的极小曲面的坐标分量应是

$$\bar{x}=\mathrm{Re}\left[-i\int\frac{1}{\cos t}i\alpha\cos t\,dt\right]=\mathrm{Re}(\alpha t),$$

$$\bar{y}=\mathrm{Re}(-\alpha i\,\mathrm{ctg}\,t),$$

$$\bar{z}=\mathrm{Re}(\alpha i\sin t).$$

如果再记 $t=\xi+i\eta$，则所得的极小曲面为

$$\bar{r}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\alpha\xi,\ -\alpha\sin\xi\,\mathrm{sh}\eta,\ -\alpha\cos\xi\,\mathrm{sh}\eta),$$

也就是**螺旋面**.

例2 决定一个极小曲面，使它以一条已知的抛物线为测地线(Catalan).

解 如果一个极小曲面通过一条抛物线，并沿此线与抛物线所在平面直交的话，那么这条抛物线必为这曲面上的测地线. 因为这时曲面在抛物线各点的法线与抛物线在同一点的主法线是重合的. 这事实反过来也成立.

现在我们把抛物线所在的平面取作 $z=0$，并把抛物线的方程记为

$$r(\varphi)=(-p\sin^2\varphi,\ 2pi\sin\varphi,\ 0),$$

而对于取纯虚数的 φ 值，分量函数 $x(\varphi)$，$y(\varphi)$ 都为实数. 另外，

如用 s 表示抛物线的弧长，则

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = -4p^2\cos^4\varphi d\varphi^2,$$

$$ds = 2pi\cos^2\varphi d\varphi,$$

$$i\int ds = -2p\int\cos^2\varphi d\varphi = -p\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right);$$

这时抛物线在任何一点的法线应该是曲面的法线，它是

$$\boldsymbol{n}(\varphi) = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}, 0\right).$$

于是按 Schwarz 公式，所求的极小曲面为

$$\bar{r} = \left\{\mathrm{Re}(-p\sin^2\varphi), \mathrm{Re}(2pi\sin\varphi),\right.$$
$$\left.\mathrm{Re}\left[-p\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]\right\},$$

其中已用到

$$z = \mathrm{Re}\left[i\int(x'Y - y'X)\,dt\right] = \mathrm{Re}\left(i\int ds\right).$$

例 3 设已知一个斜柱面的底是圆周 $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $z = 0$. 决定一个极小曲面，使它沿此圆周与该柱面相切.

这道题的解就是 Riemann-Enneper 曲面.

4. 附属极小曲面

设一个极小曲面的方程为

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{A}(u) + \boldsymbol{B}(v), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}(u)$, $\boldsymbol{B}(v)$ 满足

$$\boldsymbol{A}'(u)\cdot\boldsymbol{A}'(u) = 0, \quad \boldsymbol{B}'(v)\cdot\boldsymbol{B}'(v) = 0.$$

如果曲面是实的，则 u, v 必为共轭复数，而且 $\boldsymbol{A}(u)$, $\boldsymbol{B}(v)$ 的相应分量也互为共轭. 所以对**任何实数** α,

$$\boldsymbol{r}^* = e^{i\alpha}\boldsymbol{A}(u) + e^{-i\alpha}\boldsymbol{B}(v) \tag{2}$$

也表示一个**实的**极小曲面. 这个单参数曲面族 (参数为 α) 称为原

曲面(1)的 Bonnet **附属极小曲面**. 特别取 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时，曲面

$$r_1=i[A(u)-B(v)] \tag{3}$$

就称为(1)的**共轭极小曲面**. 例如,悬链面与正螺面便属于这一类型的两个极小曲面(参阅本节 2,例 1 与例 2).

从(2)我们容易知道,*各附属极小曲面的线素*

$$ds^{*2}=2A'(u)\cdot B'(v)\,du\,dv$$

与参数 α 无关,且在对应点的法线平行.

我们容易证明 Schwarz 定理: *附属极小曲面的对应点在同一个椭圆上.*

5. 单侧极小曲面

一般的曲面总有面有里,也就是所谓的**双侧**. 换句话说,从曲面上的一点出发,沿曲面上的任何环路回到原来出发点时,其法线的正方向是保持不变的. 然而有些曲面却不是这样, 当点沿曲面上的环路回到原来出发的位置时,曲面法线的正方向要改变. 后一种曲面称为**单侧曲面**.

现在我们要决定所有的单侧极小曲面.

依照 Weierstrass 公式得知, 在极小曲面上的一点(u,v)处的单位法向量是

$$n(u,v)=\left(\frac{u+v}{1+uv},\frac{i(v-u)}{1+uv},\frac{uv-1}{uv+1}\right).$$

如果这方向与另一点(u_1,v_1)处的单位法线方向相反,则

$$\frac{u_1+v_1}{1+u_1v_1}=-\frac{u+v}{1+uv},$$

$$\frac{v_1-u_1}{1+u_1v_1}=-\frac{v-u}{1+uv},$$

$$\frac{u_1v_1-1}{u_1v_1+1}=-\frac{uv-1}{uv+1},$$

也就是

$$u_1=-\frac{1}{v},\quad v_1=-\frac{1}{u}.$$

曲面上对应于(u_1, v_1)点的坐标应按 Weierstrass 公式去求，具体结果如下:

$$x=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{v^2}\right)\mathscr{F}\left(-\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v^2}dv+\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}du,$$

$$y=\frac{i}{2}\int\left(1+\frac{1}{v^2}\right)\mathscr{F}\left(-\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v^2}dv-\frac{i}{2}\int\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}du,$$

$$z=-\int\frac{1}{v^3}\mathscr{F}\left(-\frac{1}{v}\right)dv-\int\frac{1}{u^3}\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right)du,$$

也就是

$$x=\frac{1}{2}\int(1-u^2)\left\{-\frac{1}{u^4}\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right)\right\}du+$$

$$+\frac{1}{2}\int(1-v^2)\left\{-\frac{1}{v^4}\mathscr{F}\left(-\frac{1}{v}\right)\right\}dv,$$

$$y=\frac{i}{2}\int(1+u^2)\left\{-\frac{1}{u^4}\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right)\right\}du-$$

$$-\frac{i}{2}\int(1+v^2)\left\{-\frac{1}{v^4}\mathscr{F}\left(-\frac{1}{v}\right)\right\}dv,$$

$$z=\int u\left\{-\frac{1}{u^4}\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right)\right\}du+\int v\left\{-\frac{1}{v^4}\mathscr{F}\left(-\frac{1}{v}\right)\right\}dv.$$

如果所讨论的曲面是单侧的，则(u,v)与$\left(-\frac{1}{v},-\frac{1}{u}\right)$必定对应于同一点，所以函数$\mathscr{F}(u)$与它的共轭$\mathscr{G}(v)$之间存在着关系式

$$\mathscr{F}(u)=-\frac{1}{u^4}\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right),$$

且其逆亦真.

例 当$\mathscr{F}(u)=1-\frac{1}{u^4}$时，$\mathscr{G}(u)=1-\frac{1}{u^4}$，于是

$$\mathscr{G}\left(-\frac{1}{u}\right)=1-u^4=-u^4\mathscr{F}(u),$$

所以它们满足上述的充要条件. 这个单侧极小曲面是 Henneberg (1875)所发现的，它是一个十五次和五阶代数曲面.

6. Plateau 问题

经过给定的封闭挠曲线，作一个极小曲面的问题，虽然由 Plateau 通过实验证明它的解一定存在，但是用数学方法严格证明这件事却是不容易的. 这问题一直到 1930 年才由 J. Douglas 与 T. Radó 在广义解的范围内独立给出证明①.

基本的定理是：*极小曲面与它的球面表示必成保角对应*(§19, 习题 2). B. Riemann 曾根据这条定理研究过下列一些问题：

1. 作一个极小曲面，使它经过两条异面直线.
2. 作一个极小曲面，使它经过两条相交直线以及与它们所在平面平行的另一条直线.
3. 作一个极小曲面，使它经过任何三条直线.
4. 作一个极小曲面，使它经过一个空间四边形.
5. 作一个极小曲面，使它经过两平行平面上的各一个多边形.
6. 作一个极小曲面，使它经过两平行平面上的各一个圆周.

在这里我们仅仅是举些简单的例题，说明过去的学者所用的方法而已. 至于更复杂的问题及近代的有关发展，不是本书范围所能及的.

设极小曲面 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的分量函数为

---

① 直到最近，R. Osserman 才证明：所得的解曲面确实是处处正则的——再版时加注.

$$x=\frac{1}{2}\int(1-u^2)\mathscr{F}(u)\,du+\frac{1}{2}\int(1-v^2)\mathscr{G}(v)\,dv,$$

$$y=\frac{i}{2}\int(1+u^2)\mathscr{F}(u)\,du-\frac{i}{2}\int(1+v^2)\mathscr{G}(v)\,dv,$$

$$z=\int u\mathscr{F}(u)\,du+\int v\mathscr{G}(v)\,dv,$$

则它的球面表示为

$$\boldsymbol{n}=(X,Y,Z)=\left(\frac{u+v}{1+uv},\frac{i(v-u)}{1+uv},\frac{uv-1}{1+uv}\right),$$

并且它与点$(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$间的对应是**保角的**.

现在我们来求一个函数$\sigma=\sigma(u)$,使它满足

$$\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2=2\mathscr{F}(u),$$

于是

$$\sigma=\int\sqrt{2\mathscr{F}(u)}\,du.$$

如果分别用x_1与y_1来表示σ的实部与虚部,则

$$\sigma=x_1+iy_1=\int\sqrt{2\mathscr{F}(u)}\,du$$

$$\bar{\sigma}=x_1-iy_1=\int\sqrt{2\mathscr{G}(v)}\,dv,$$

因而σ平面的线素就为

$$|d\sigma|^2=dx_1^2+dy_1^2=2\sqrt{\mathscr{F}(u)\mathscr{G}(v)}\,du\,dv.$$

但极小曲面的线素是

$$ds^2=(uv+1)^2\mathscr{F}(u)\mathscr{G}(v)\,du\,dv,$$

所以极小曲面与σ平面之间的对应

$$\sigma=\sigma(u)$$

也是**保角的**. 因此, Gauss 球面表示与σ平面间的对应是保角对应.

在这对应之下，极小曲面的曲率线与σ平面上平行于实、虚两轴的直线互相对应。

事实上，由

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\Big(-u\mathscr{F}(u)+\frac{1}{2}(1-u^2)\mathscr{F}'(u),$$

$$iu\mathscr{F}(u)+\frac{i}{2}(1+u^2)\mathscr{F}'(u),\mathscr{F}(u)+u\mathscr{F}'(u)\Big),$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\Big(-v\mathscr{G}(v)+\frac{1}{2}(1-v^2)\mathscr{G}'(v),$$

$$-iv\mathscr{G}(v)-\frac{i}{2}(1+v^2)\mathscr{G}'(v),\mathscr{G}(v)+v\mathscr{G}'(v)\Big)$$

我们得到

$$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=-\mathscr{F}(u),$$
$$M=0,$$
$$N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=-\mathscr{G}(v),$$

所以曲率线的微分方程为

$$\mathscr{F}(u)du^2-\mathscr{G}(v)dv^2=0.$$

这方程又可写为

$$\int\sqrt{2\mathscr{F}(u)}du\pm\int\sqrt{2\mathscr{G}(v)}dv=\text{常数},$$

即

$$x_1+iy_1\pm(x_1-iy_1)=\text{常数},$$

也就是

$$x_1=\text{常数},\quad\text{或}\quad y_1=\text{常数}.$$

另一方面，极小曲面的渐近线平分曲率线间的交角，而上列的对应又是保角对应，所以极小曲面的渐近线在σ平面上的象是同实轴和虚轴成45°交角的两系平行线.

为了说明如何应用上述原理，我们举一些例子于下.

例 1 作一个极小曲面，使它经过两条异面直线

解 假定所求的曲面存在，如我们把两直线所围成的曲面部分对应到 Gauss 单位球面上，则得到两个大圆之间的领域，而且各个大圆所在平面与对应直线相垂直

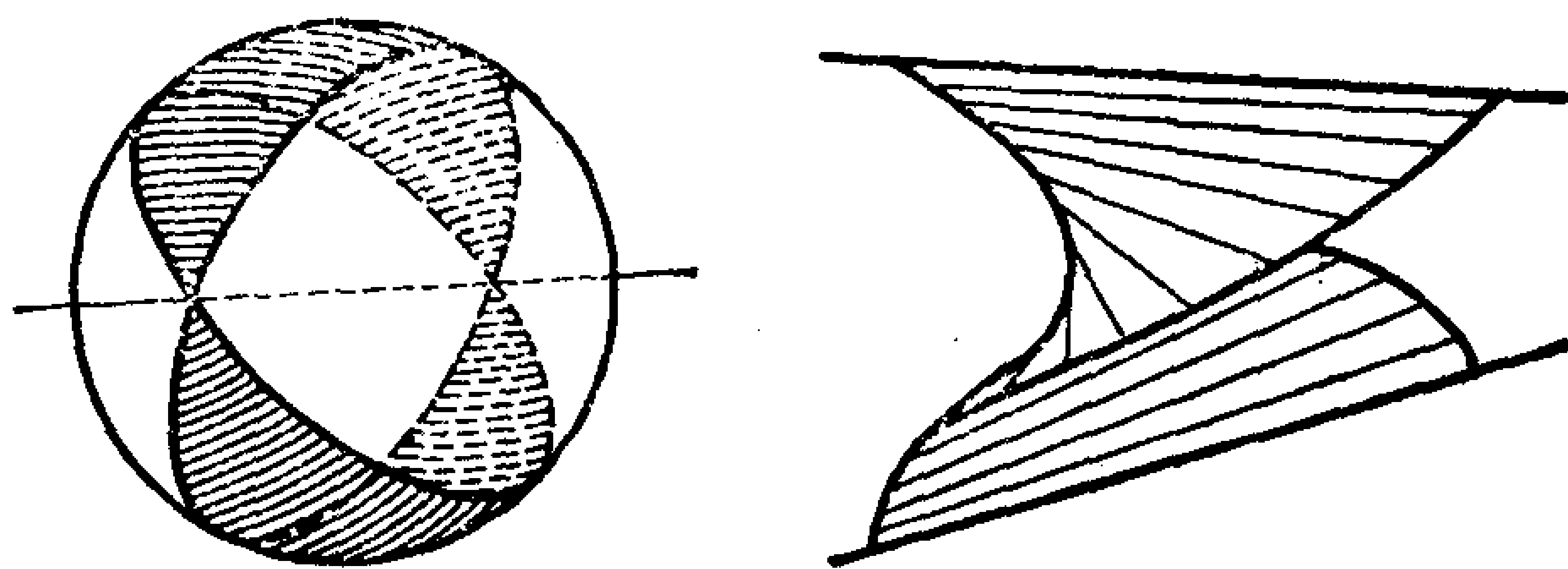
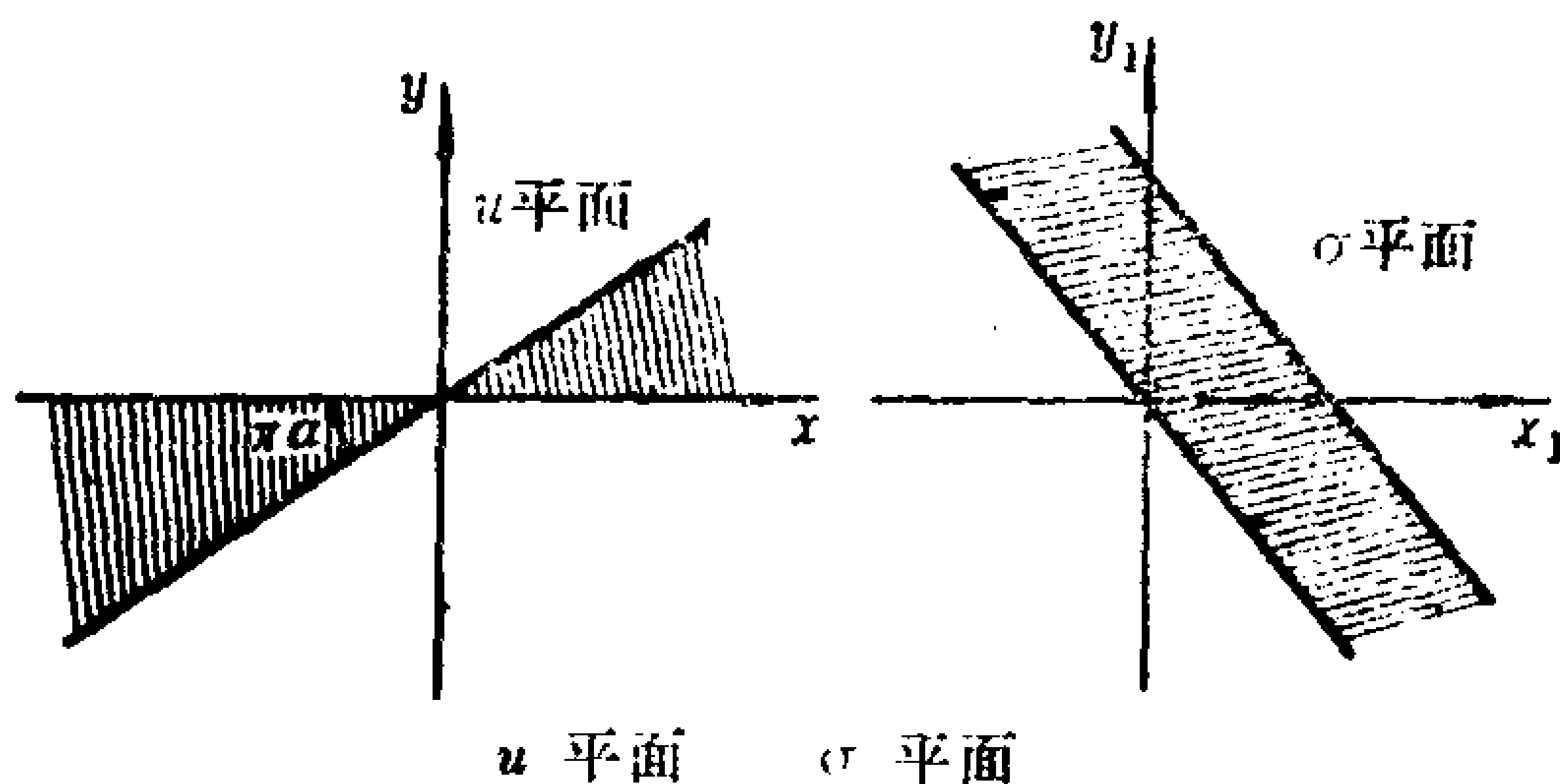


图 29

其次，将极小曲面对应到 σ 平面. 因为直线是曲面上的渐近曲线，并且根据假定原两直线不相交，所以 σ 平面上的象必定为两条平行直线，而且与一坐标轴，例如 y_1 轴，相交成 45°角. 于是我们在 σ 平面上得到两条平行直线构成的带状领域(参见图 30 的右图).



u 平面 σ 平面

图 30

另外，把单位球面上的点用球极投影(stereographic projection)保角地对应到 u 平面，这里 $u=x+iy$ 表示复数. 因为球面点的坐标为

$$(X,\ Y,\ Z)=\left(\frac{u+v}{1+uv},\ \frac{i(v-u)}{1+uv},\ \frac{uv-1}{1+uv}\right),$$

所以把它从北极(0,0,1)投影到 xy 平面时，它的象的坐标是

$$x=\frac{1}{2}(u+v),\quad y=\frac{i}{2}(v-u),$$

即

$$x+iy=u.$$

由于 σ 平面与 u 平面之间的对应为保角对应，所以我们讨论的问题就归结于下列两领域间如何建立保角对应的问题(图 30).

先根据变换

$$u=e^{\alpha u'},$$

即

$$u'=\frac{1}{\alpha}\ln u\quad(\alpha\text{ 为实数}),$$

把 u 平面的领域保角地对应到 u' 平面，从而得到它上半平面中的带状领域. 然后把它旋转 45°，而且变换其宽度使它与 σ 平面上的对应带状领域相同，这时所需的变换是

$$\sigma=\rho u' e^{\pm\frac{\pi}{4}i}\qquad(\rho\text{ 为实数}).$$

因此，u 平面到 σ 平面的变换是

$$\sigma=\frac{\rho}{\alpha}e^{\pm\frac{\pi}{4}i}\ln u.$$

由此我们得到

$$2\mathscr{F}(u)=\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2=\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2 e^{\pm\frac{\pi}{2}i}\frac{1}{u^2},$$

$$\mathscr{F}(u)=\frac{iq}{u^2}\qquad(q\text{ 为实数}),$$

因而我们所求的极小曲面为正螺面(参考本节 2，例 2).

例 2　已知两条直线 AB、AC 与一个给定平面相交于 B、C 两点. 决定一个极小曲面，使它经过 AB、AC，并与给定平面直交.

解　假定所求的曲面存在，并按上例方法作它的 Gauss 球面

表示. 这时除了两直线 AB、AC 必须变为两个大圆外,曲面与已知平面的交线也必定变为球面上的一个大圆，这是因为沿交线曲面的法线落在已知平面内,与固定方向垂直. 于是曲面的边界 ABC 在球面上的象是一个球面三角形(仍记作 ABC).

设这个球面三角形 ABC 的内角为 $\lambda\pi$，$\mu\pi$, $\nu\pi$. 经过保角投影以后，在 u 平面上就得到一个圆弧三角形(还是记作 ABC)，它的三个内角还是 $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$(图 31).

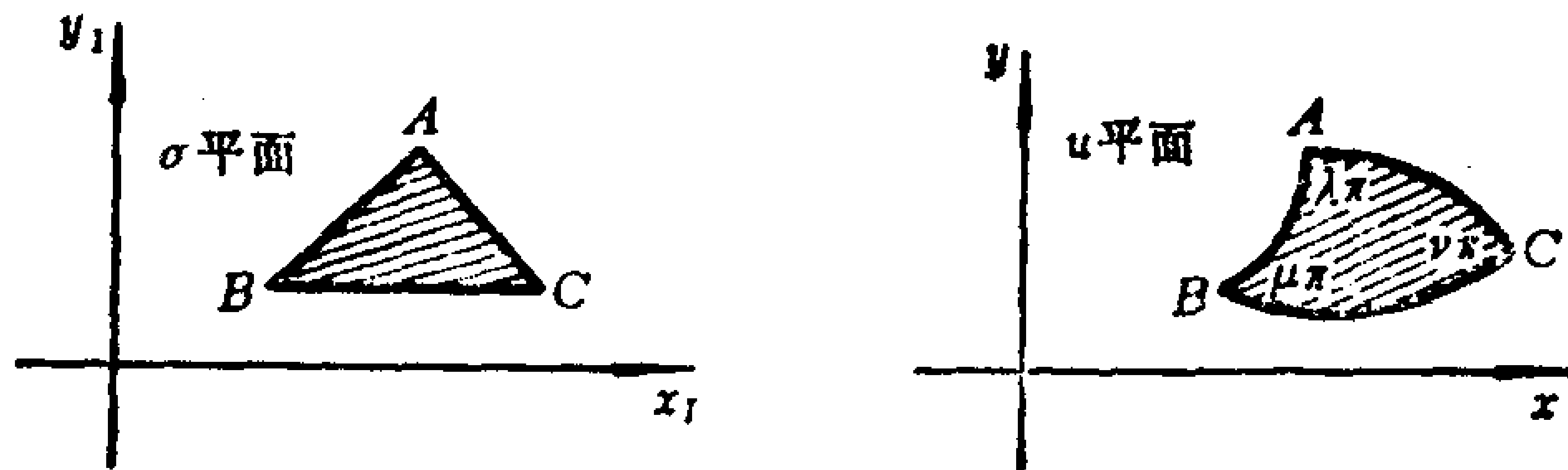


图 31

两直线 AB 与 AC 是曲面上相交的渐近曲线，它们的象为 σ 平面上的两条直线，并且它们各与坐标轴成 45° 角. 至于曲面与给定平面的交线 BC 则为曲面的曲率线 (可由 Joachimsthal 定理或定义推得)，所以它的象是平行于一个坐标轴,比如 x_1 轴的一条直线. 因此,在 σ 平面上我们得到一个等腰直角三角形 ABC.

一般在 u 平面上已知一个圆弧三角形 ABC 时,我们把它的三个内角设为$(1-\gamma)\pi$, $(\gamma-\alpha-\beta)\pi$, $(\alpha-\beta)\pi$. 如果要把三个顶点 A、B、C 分别对应于 t 平面上的 0、1、∞ 三点，并把三角形 ABC 的内部保角对应到 t 平面的上半平面,这时所需的变换是

$$u=C\frac{t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;t)}{F(\alpha,\beta,\gamma;t)},\tag{1}$$

式中 C 为常数，$F(\alpha,\beta,\gamma;\ t)$则表示超越几何级数，也就是微分方程

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)t\}\frac{dy}{dt}-\alpha\beta y=0$$

的解. 其证明从略,读者可参阅复变函数论,例如

Forsyth 著:«Theory of Functions».

Picard 著:«Traité d'Analyse»,第三卷.

对我们所讨论的问题,

$$1-\gamma=\lambda,\ \gamma-\alpha-\beta=\mu,\ \alpha-\beta=\nu,$$

也就是

$$\gamma=1-\lambda,\ \alpha=\frac{1}{2}(1-\lambda-\mu+\nu),\quad \beta=\frac{1}{2}(1-\lambda-\mu-\nu).$$

最后必须求 t 的上半平面到 σ 平面上三角形 ABC 内部的保角对应,使得 $t=a, t=b,\ t=c$ 三点分别对应于 A, B, C. 对此有 Christoffel-Schwarz 公式

$$\sigma=K\int(t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt \qquad (K\text{为常数}),$$

式中,$\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ 表示 σ 平面上三角形 ABC 的三内角. 在我们所讨论的问题中,

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\gamma=\frac{1}{4};a=0, b=1, c=\infty,$$

于是

$$\sigma=K\int_1^t\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\frac{3}{4}}}. \tag{2}$$

从(1)与(2)可得 $\sigma=\sigma(u)$, 于是我们得到 $\mathscr{F}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2$.

7. 曲率线都是平面曲线的极小曲面

设 u, v 为一个极小曲面的极小曲线参数,则曲面的线素为

$$ds^2=2F\,du\,dv,$$

式中的

$$F=\frac{1}{2}(1+uv)^2\mathscr{F}(u)\mathscr{G}(v).$$

这时，曲面的基本微分方程是

$$\boldsymbol{r}_{uu}=\frac{F_u}{F}\boldsymbol{r}_u-\mathscr{F}(u)\boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}=0.$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}=\frac{F_v}{F}\boldsymbol{r}_v-\mathscr{G}(v)\boldsymbol{n};$$

$$\boldsymbol{n}_{uu}=\left\{\frac{\mathscr{F}'(u)}{\mathscr{F}(u)}-\frac{F_u}{F}\right\}\boldsymbol{n}_u,$$

$$\boldsymbol{n}_{uv}=-\frac{1}{F}\mathscr{F}(u)\mathscr{G}(v)\boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{n}_{vv}=\left\{\frac{\mathscr{G}'(v)}{\mathscr{G}(v)}-\frac{F_v}{F}\right\}\boldsymbol{n}_v.$$

曲率线的微分方程为

$$\mathscr{F}(u)du^2-\mathscr{G}(v)dv^2=0,$$

改写后为

$$\frac{du}{dv}=\varepsilon P \qquad \left(P=\sqrt{\frac{\mathscr{G}(v)}{\mathscr{F}(u)}}\right),$$

其中 $\varepsilon=\pm1$ 对应于两系曲率线. 容易知道，曲率线在其上一点 (u,v) 处密切平面的法线方向为

$$\boldsymbol{\nu}=\frac{1}{iF}\frac{d\boldsymbol{r}}{dv}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dv^2},$$

式中 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dv}=\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dv}+\boldsymbol{r}_v=\varepsilon P\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v$, 等等.

然后，按上述的基本微分方程计算的结果是

$$\boldsymbol{\nu}=\left(\varepsilon P\frac{F_v}{F}-P^2\frac{F_u}{F}-PP_u-\varepsilon P_v\right)\boldsymbol{n}-2P^2\boldsymbol{n}_u+2\varepsilon P\boldsymbol{n}_v$$

要想使这样曲率线都是平面曲线，沿每条曲率线，密切平面必须不变，即

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{dv}=c\boldsymbol{\nu},$$

c 是适当的函数. 由于

$$\frac{d\nu}{dv}=\varepsilon P\nu_u+\nu_v,$$

所以要求的条件为

$$4\frac{\mathscr{F}''(u)}{\mathscr{F}^2(u)}-5\left[\frac{\mathscr{F}'(u)}{\mathscr{F}(u)}\right]^2\frac{1}{\mathscr{F}(u)}=4\frac{\mathscr{G}''(v)}{\mathscr{G}^2(v)}-5\left[\frac{\mathscr{G}'(v)}{\mathscr{G}(v)}\right]^2\frac{1}{\mathscr{G}(v)},\tag{S}$$

于是均须等于常数.

因为(S)式与 ε 无关,所以我们得到

定理 若极小曲面上的一系曲率线都为平面曲线, 则另一系曲率线也全是平面曲线.

我们来求这种极小曲面. 它对应的函数 $\mathscr{F}(u)$应是

$$4\frac{\mathscr{F}''(u)}{\mathscr{F}^2(u)}-5\frac{\mathscr{F}'^2(u)}{\mathscr{F}^3(u)}=\text{常数}$$

的解. 如果$\mathscr{F}'(u)=0$,则$\mathscr{F}(u)=$常数,于是我们得到 Enneper **曲面**(本节 2,例 3)

如果 $\mathscr{F}'(u)\neq0$,则它的解为

$$\mathscr{F}(u)=\frac{c_1}{[(u+c_2)^2+c_3]^2},$$

其中 c_1,c_2,c_3 都是常数. 所对应的极小曲面为 Bonnet**曲面**(本节 2,例 4).

习 题

1. 设螺旋面的方程为

$$\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta,f(r)+k\theta),$$

式中,k 为常数. 求函数 $f(r)$,使它成为一个极小曲面(Falch??).

2. 设 S_a 是极小曲面 S 的附属极小曲面. 证明: S_a 的曲率线对应于 S 上与其曲率线成等角$\frac{1}{2}\alpha$ 的曲线.

3. 设 Enneper 极小曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}=(3\alpha+3\alpha\beta^2-\alpha^3,\ -3\beta-3\alpha^2\beta+\beta^3,\ 3\alpha^2-3\beta^2).$$

说明下列事项:

(a) 这曲面是九次代数曲面,即它与任何一条直线有九个交点。

(b) 直线 $z=0,x=y$ 与直线 $z=0,x=-y$ 都在曲面上,而且是它的对称轴.

(c) 曲率线是曲线 $\alpha=$常数和 $\beta=$常数. 各曲率线是亏格为零的平面曲线,而且所在平面是

$$x+\alpha z-3\alpha-2\alpha^3=0,\qquad y+\beta z+3\beta+2\beta^3=0.$$

(d) 曲率线的球面象构成两系圆周,各圆周所在的平面都通过两个定点,而且这两个定点又落到球面在一点的两条直交切线上.

(e) 渐近曲线的方程为

$$\alpha+\beta=\text{常数},\qquad \alpha-\beta=\text{常数},$$

而且都为三次挠曲线.

(f) 曲面与旋转面互为变形.

(g) 它的附属极小曲面都与原曲面有同一形状,而且决定于原曲面绕 z 轴的旋转.

(h) 已知二条抛物线(焦点抛物线)

$$\boldsymbol{\rho}_1(\alpha)=(4\alpha,0,2\alpha^2-1),\tag{I}$$

$$\boldsymbol{\rho}_2(\beta)=(0,-4\beta,-2\beta^2+1).\tag{II}$$

连接(I)的任何点 α 与(II)的任何点 β,并作连接线段的垂直平分平面,则所有这些平面包络成一个 Enneper 极小曲面. (Darboux)

4. 在两个共轭极小曲面上,取对应的两条测地线,证明:其中一条曲线在一点的曲率必定等于对应的第二条曲线在对应点的挠率(Bianchi, 1884).

[提示:设 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$ 是曲面 S 的一条测地线,s 为弧长,$\boldsymbol{N}$为它的主法向量. 根据本节 3,共轭曲面 S_1 上的对应曲线 $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 满足

$$d\boldsymbol{r}_1=\pm\left(\boldsymbol{N}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)ds=\mp\boldsymbol{B}ds,$$

这里 $\boldsymbol{B}$ 是第一条曲线的从法向量. 于是

$$\boldsymbol{r}_1=\mp\int\boldsymbol{B}ds.$$

因为 $\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{ds}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{ds}=1,\quad \dfrac{d^2\boldsymbol{r}_1}{ds^2}\cdot\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_1}{ds^2}=\dfrac{1}{\rho^2}$, 所以 $r_1=|\rho|$.]

5. 决定一个极小曲面，使它以已知圆周为测地线.

6. 证明：正螺面是直纹面中唯一的极小曲面(Catalan, 1842).

7. 证明：极小曲面上的曲率线以及渐近曲线分别组成等温系统.

8. 设 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 表示一个极小曲面；$\boldsymbol{r}_0(u,v)=(x_0(u,v),y_0(u,v),\ z_0(u,v))$ 表示它的共轭极小曲面，并设 k 为任何实数，则由

$$x_1=\frac{1+k^2}{2k}x-\frac{k^2-1}{2k}y_0,\quad y_1=\frac{1+k^2}{2k}y+\frac{k^2-1}{2k}x_0,\quad z_1=z$$

决定的曲面 $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 也是一个极小曲面. 并且当用相同的 $(u,\ v)$ 值与原极小曲面作点对应时，这个对应必定是保角的(Goursat, 1888).

9. 最一般的极小曲面 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 决定于方程

$$x=\mathrm{Re}\left(ie^{i\alpha}\int f(l)\cos l\,dl\right),$$

$$y=\mathrm{Re}\left(ie^{i\alpha}\int f(l)\sin l\,dl\right),$$

$$z=\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\int f(l)\,dl\right)$$

式中，α 为实常数(Peterson).

在上述公式中如令 $\alpha=0, e^{il}=is,\ f(l)=2is^2\mathscr{F}(s)$，则可得到 Weierstrass 公式.

10. 证明：在极小直线 $x-iy=0,\ z=0$ 的周围所作的虚旋转曲面 $(x-iy)^4+3(x^2+y^2+z^2)=0$ 是极小曲面(Geiser). 另外，连接三次代数极小曲线上的任两点，其线段中点的轨迹 $2(x-iy)^3-6i(x-iy)z-3(x+iy)=0$ 也是极小曲面. (Lie, 1879)

§ 30. W 曲 面

1. 定义及基本量

如果一个曲面在每点的两个主曲率半径 R_1 与 R_2 满足形如

$$f(R_1,\ R_2)=0 \tag{1}$$

的关系式，则此曲面就称为 Weingarten**曲面**或 W **曲面**. 这类曲面最初是由 Weingarten(1862)研究的，它们构成了重要的特殊族.

例如，极小曲面$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0\right)$与常总曲率的曲面$\left(\frac{1}{R_1R_2}=\text{常数}\right)$都属于这类曲面.

把(1)分别关于 u, v 偏微分，我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial R_2}\frac{\partial R_2}{\partial v}=0.$$

由于$\frac{\partial f}{\partial R_1}$与$\frac{\partial f}{\partial R_2}$不能同时为零，于是

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial R_1}{\partial u} & \frac{\partial R_2}{\partial u}\\ \frac{\partial R_1}{\partial v} & \frac{\partial R_2}{\partial v}\end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

反过来，如果等式(2)成立，则变量 u, v 的两个函数 R_1, R_2 必定函数相关，也就是有形式(1)的关系成立.

如果我们把 W 曲面的曲率线取为 u, v 参数曲线，这时

$$F=0, \quad M=0, \tag{3}$$

曲面的线素为

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2, \tag{4}$$

而两主曲率半径 R_1, R_2 的值则等于(§15.4，公式(3))

$$R_1=\frac{E}{L}, \qquad R_2=\frac{G}{N}. \tag{5}$$

另外，这时还成立 O. Rodriques 公式(§16.1)

$$\boldsymbol{n}_u=-\frac{1}{R_1}\boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{n}_v=-\frac{1}{R_2}\boldsymbol{r}_v. \tag{6}$$

Gauss 方程现取如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)=-\frac{LN}{\sqrt{EG}}=-\frac{\sqrt{EG}}{R_1R_2}, \tag{7}$$

而 Codazzi 方程则为

$$\frac{\partial L}{\partial v}=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \frac{\partial N}{\partial u}=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u}, \tag{8}$$

我们可把它们改写为

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{R_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{R_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial G}{\partial u},$$

也就是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{\sqrt{E}}{R_1}&=\frac{-1}{R_1-R_2}\frac{\partial R_1}{\partial v},\\ \frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\sqrt{G}}{R_2}&=\frac{1}{R_1-R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u}.\end{aligned} \tag{9}$$

对于一个W曲面，(9)的第一式右端的R_2按(1)可被表成为R_1的函数，同样(9)的第二式右端的R_1也可被表成为R_2的函数，所以

$$\ln\frac{\sqrt{E}}{R_1}-\int\frac{dR_1}{R_2-R_1} \qquad \text{仅仅为 } u \text{ 的函数},$$

$$\ln\frac{\sqrt{G}}{R_2}-\int\frac{dR_2}{R_1-R_2} \qquad \text{仅仅为 } v \text{ 的函数}.$$

除了R_1,R_2中有一个为常数或$R_1=R_2$外，上列两积分都为有限。因此我们有

$$E=R_1^2 f(u)e^{2\int\frac{dR_1}{R_2-R_1}},G=R_2^2\varphi(v)e^{2\int\frac{dR_2}{R_1-R_2}}. \tag{10}$$

如果以

$$\int^u\sqrt{f(u)}du, \quad \int^v\sqrt{\varphi(v)}\,dv$$

为新参数，且仍记为u,v，则W曲面的线素仍为

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2, \tag{11}$$

但其中的

$$E=R_1^2 e^{2\int\frac{dR_1}{R_2-R_1}},\quad G=R_2^2 e^{2\int\frac{dR_2}{R_1-R_2}}. \tag{12}$$

进而，我们来作W曲面的球面表示．根据(6)与(12)，得到

$$\begin{aligned} e&=\frac{E}{R_1^2}=e^{2\int\frac{dR_1}{R_2-R_1}},\\ f&=0,\\ g&=\frac{G}{R_2^2}=e^{2\int\frac{dR_2}{R_1-R_2}}, \end{aligned} \tag{13}$$

于是

$$d\sigma^2=edu^2+gdv^2. \tag{14}$$

由 Gauss 方程(7)所作球面表示($R_1R_2=1$)的对应方程为

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right)+\sqrt{eg}=0. \tag{15}$$

现在我们导入辅助参数

$$w=e^{\int\frac{dR_1}{R_1-R_2}}, \tag{16}$$

并且把 R_1, R_2 看作 w 的函数，例如

$$R_1=\varphi(w), \tag{17}$$

从(16)可得

$$\frac{1}{R_1-R_2}\frac{dR_1}{dw}=\frac{1}{w},$$

或者

$$\frac{\varphi'(w)}{R_1-R_2}=\frac{1}{w}. \tag{18}$$

从而解得

$$R_1=\varphi(w),\quad R_2=\varphi(w)-w\varphi'(w). \tag{19}$$

这两个值必须满足条件(1)．把(19)代入(1)，求所得的微分方程的解 φ；利用所得的 φ 再按(19)计算 R_1 与 R_2，并把它们的值代入(11)—(14)，这样，我们就得到下列重要的等式：

$$E=\left\{\frac{\varphi(w)}{w}\right\}^2,\quad F=0,\quad G=\left\{\frac{\varphi(w)-w\varphi'(w)}{\varphi'(w)}\right\}^2,\tag{20}$$

$$ds^2=\left\{\frac{\varphi(w)}{w}\right\}^2du^2+\left\{\frac{\varphi(w)-w\varphi'(w)}{\varphi'(w)}\right\}^2dv^2;\tag{21}$$

$$e=\frac{1}{w^2},\quad f=0,g=\frac{1}{\varphi'^2(w)},\tag{22}$$

$$d\sigma^2=\frac{du^2}{w^2}+\frac{dv^2}{\varphi'^2(w)}.\tag{23}$$

在等式(20)—(23)中，w 仍旧是 u，v 的待定函数．如果将(22)代入(15)，容易知道 w 满足的微分方程：

$$\frac{1}{w\varphi'(w)}=\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\varphi''(w)ww_u}{\varphi'^2(w)}\right\}+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\varphi'(w)w_v}{w^2}\right\}.\tag{24}$$

从(19)—(23)我们得出两个定理：

定理 1 如果将一个 W 曲面表示到球面，则我们总可选到曲率线参数 u,v，使曲面的第三基本形式具有(23)的形式，式中的 w 是 u,v 的函数．主曲率半径则决定于(19)．

定理 2 设 w 为 u，v 的函数并满足方程(24)，则必存在一个 W 曲面，使它的基本量为(20)与(22)．当已知球面表示的线素为(23)时，除绕原点的旋转以外，我们完全可以决定 $\boldsymbol{n}=(X,Y,Z)$，式中，

$$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_u,\boldsymbol{n}_v)=\frac{1}{w\varphi'(w)}.\tag{25}$$

这样决定了 $\boldsymbol{n}$ 之后，我们按照

$$\boldsymbol{r}=-\int\{R_1\boldsymbol{n}_udu+R_2\boldsymbol{n}_vdv\}\tag{26}$$

即得所求的 W 曲面．

例 设所讨论的曲面为极小曲面，即 $R_1+R_2=0$．由(19)，

$$2\varphi(w)-w\varphi'(w)=0,$$

所以 $\varphi(w)=\frac{1}{2}w^2$，于是

$$
\begin{aligned}
d\sigma^2&=\frac{1}{w^2}(du^2+dv^2),\\
ds^2&=\frac{w^2}{4}(du^2+dv^2),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

式中

$$
\frac{\partial^2\ln w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\ln w}{\partial v^2}=\frac{1}{w^2}.
$$

令

$$
\xi=u+iv,\quad \eta=u-iv
$$

且 $\frac{1}{2w^2}=\theta$，则我们便得到 Liouville 型的微分方程

$$
\frac{\partial^2\ln\theta}{\partial\xi\partial\eta}=\theta. \tag{28}
$$

这个方程的解为

$$
\theta=\frac{2U'(\xi)V'(\eta)}{[U(\xi)+V(\eta)]^2},
$$

也就是

$$
w=\frac{U(u+iv)+V(u-iv)}{2\sqrt{U'(u+iv)V'(u-iv)}}.
$$

2. W 曲面的一个特征

沿曲面的一条曲率线所引的曲面的法线必组成一个可展曲面，一般它是某一挠曲线 Γ 的切线曲面．对于一族曲率线，就可得一族曲线 Γ，它们便构成一个新曲面．因为原曲面有两族曲率线，所以可得两个新曲面，我们把它们记为 S_1 与 S_2，称为**中心曲面**．凡是在原曲面同一条法线上的 S_1 与 S_2 的两点称为它们的**对应点**．

我们提出一个问题：当 S_1 与 S_2 之间的对应满足什么样的条件时，原曲面才是W曲面呢？答案如下：

定理 设 S_1, S_2 为一个曲面 S 的两个中心曲面，并它们以原曲面同一条法线上的两点为对应点. 如果 S_1 与 S_2 的渐近曲线互相对应，则 S 必为 W 曲面，其逆亦真.

证明 设 u, v 为 S 的曲率线参数，于是

$$F=0, \quad M=0.$$

记 S 的位置向量为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$，并记单位法向量为 $\boldsymbol{n}(u、v)$，我们有

$$\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{n}=-\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{n}=-\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}.$$

根据定义，S_1 与 S_2 的位置向量 $\boldsymbol{r}_1=(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$与 $\boldsymbol{r}_2=(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$分别为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+R_2\boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}+R_1\boldsymbol{n}.$$

对第一式微分，

$$\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}_1=\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}+\frac{\partial R_2}{\partial u}\boldsymbol{n}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}_1=\frac{\partial R_2}{\partial v}\boldsymbol{n}.$$

所以 S_1 的第一基本量为

$$E_1=E\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)^2+\left(\frac{\partial R_2}{\partial u}\right)^2,$$

$$F_1=\frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v},$$

$$G_1=\left(\frac{\partial R_2}{\partial v}\right)^2;$$

$$\sqrt{E_1G_1-F_1^2}=\pm\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial R_2}{\partial v}\sqrt{E};$$

S_1 的单位法向量是

$$\boldsymbol{n}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$$

也就是

$$\boldsymbol{n}_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}\quad(\varepsilon=\pm1).$$

现在我们转到对S_1的第二基本量的计算：

$$\begin{aligned}L_1&=-\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{n}_1\\&=-\left\{\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}+\frac{\partial R_2}{\partial u}\boldsymbol{n}\right\}\cdot\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\boldsymbol{r}+(*)\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}\right\}\\&=-\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{r}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\boldsymbol{r}\\&=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}=\varepsilon\frac{E}{\sqrt{G}}\frac{R_2}{R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial v},\end{aligned}$$

$$M_1=-\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{n}_1=0,$$

$$\begin{aligned}N_1&=-\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{n}_1=-\frac{\partial R_2}{\partial v}\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\boldsymbol{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}\\&=-\frac{\varepsilon}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_2}{\partial v}N=-\frac{\varepsilon\sqrt{G}}{R_2}\frac{\partial R_2}{\partial v}.\end{aligned}$$

所以

$$L_1:M_1:N_1=-ER_2^2\frac{\partial R_1}{\partial v}:0:GR_1^2\frac{\partial R_2}{\partial v}.$$

用同样的方法我们可以求出 S_2 的第二基本量，从而得到

$$L_2:M_2:N_2=-ER_2^2\frac{\partial R_1}{\partial u}:0:\ GR_1^2\frac{\partial R_2}{\partial u}.$$

因而我们知道，这时条件

$$\frac{\partial(R_1,R_2)}{\partial(u,v)}=0$$

就与

$$L_1:M_1:N_1=L_2:M_2:N_2$$

为等价. 证毕.

本定理是 Ribaucour(1872)发现的.

习 题

1. 设W曲面的两个主曲率半径为R_1, R_2,并且它的两个中心曲面S_1, S_2在对应点的总曲率为K_1, K_2. 证明

$$K_1K_2=\frac{1}{(R_1-R_2)^4} \qquad \text{(Halphen, 1876)}$$

2. 凡是满足同一关系式$f(R_1,R_2)=0$的所有W曲面必有下列性质:它们的中心曲面S_1都可变形为同一个旋转面,其中,S_1的测地线变为旋转面上的子午线,而且在S_1上,$R_1=$常数的曲线则变为平行环. 对于S_2也是同样的.

3. 设两中心曲面在对应点的曲率线互相对应,则原曲面是$R_1-R_2=$常数的W曲面,且其逆亦真. 再证明:这时$K_1=K_2=$负常数.

4. 设n为常数,w是原点到曲面切平面的距离. 试讨论$R_1+R_2=nw$的曲面(Appell, Goursat).

5. 凡是曲率线都为平面曲线,而且$R_1\cdot R_2$或者$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$等于常数的曲面,必定为旋转面(Dini, 1868).

6. 如果$R_1=$常数的曲线与曲率线相交于定角,则这曲面必定为螺旋面(Raffy, 1897).

7. W曲面的中心曲面与旋转面互为变形.

8. 我们运用消去法以及已知函数的积分,必能解决求一个W曲面的曲率线问题.

§31. 用运动学讨论曲面的方法

1. 运动学初步公式

本节将叙述由 Darboux 所首创的应用运动学方法的曲面论. 设OX, OY, OZ为固定的直角坐标轴;Ox, Oy, Oz为固定于运动刚

体的直角坐标轴，这时 O 为固定点. 我们假定，OX、OY、OZ 三轴上的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 在动轴 Ox,Oy,Oz 上的分量都是两独立参数 u,v 的一些函数. 设固定 v 而变动 u，把 u 看作时间，并设在时间 u 时刚体旋转的角速度向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 相对于动轴 Ox，Oy，Oz 的分解是 $\boldsymbol{\Omega}=(P,Q,R)$. 设 $\boldsymbol{V}=(V_x,V_y,V_z)$ 是动点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 在固定空间的速度向量被分解于动轴 Ox,Oy,Oz 上的表示式，则成立如下的关系式：

$$\boldsymbol{V}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

特别地，当我们取固定向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的端点作为运动点时，就有

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial u}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial u}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial u}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}, \tag{4}$$

必须指出：在(2)，(3)，(4)左端中的 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是方便上作为各固定单位向量相对于动轴的分解式所表示的向量而出现的.

同样地，如果固定 u 而变动 v，并设在时间 v 时刚体旋转的角速度 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 相对于动轴的分解为 $\boldsymbol{\Omega}_1=(P_1,Q_1,R_1)$，则必成立

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial v}+\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\\&\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial v}+\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\\&\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial v}+\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{5}$$

我们把(2)式关于 v 微分，

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{i}}{\partial u\partial v}+\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\Omega}\times\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial v}=\boldsymbol{0},$$

并根据(5)进行改写,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{i}}{\partial u \partial v}+\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}\times \boldsymbol{i}+(\boldsymbol{\Omega}_1\times \boldsymbol{i})\times \boldsymbol{\Omega}=0.$$

同样地,如把(5)的第一式关于 u 微分,并利用(2)进行改写,则可得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{i}}{\partial v \partial u}+\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}\times \boldsymbol{i}+(\boldsymbol{\Omega}\times \boldsymbol{i})\times \boldsymbol{\Omega}_1=0.$$

把所得的两个式子边边相减,并利用双重叉积公式化简

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\Omega}\times \boldsymbol{i})\times \boldsymbol{\Omega}_1-(\boldsymbol{\Omega}_1\times \boldsymbol{i})\times \boldsymbol{\Omega}\\ =&-(\boldsymbol{\Omega}_1\cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{\Omega}+(\boldsymbol{\Omega}\cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{\Omega}_1=-(\boldsymbol{\Omega}_1\times \boldsymbol{\Omega})\times \boldsymbol{i},\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}-\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}-\boldsymbol{\Omega}_1\times \boldsymbol{\Omega}\right)\times \boldsymbol{i}=0.$$

完全类似地,我们可得

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}-\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}-\boldsymbol{\Omega}_1\times \boldsymbol{\Omega}\right)\times \boldsymbol{j}=0,$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}-\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}-\boldsymbol{\Omega}_1\times \boldsymbol{\Omega}\right)\times \boldsymbol{k}=0.$$

因此,角速度向量 $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}_1$ 必定满足关系式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}-\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}-\boldsymbol{\Omega}_1\times \boldsymbol{\Omega}=0.$$

其次,设运动刚体并不是单纯地绕 O 点旋转.我们取固定于刚体从而与其共同运动的坐标原点 O' 和坐标轴 $O'x, O'y, O'z$. 当固定 v 而仅变更时间 u 时,设动坐标系的原点 O' 的速度 $\boldsymbol{V}_{O'}$ 在动坐标轴上的分解为 $\boldsymbol{V}_{O'}=(\xi, \eta, \zeta)$. 反过来,当固定 u 而仅变更时间 v 时,设 O' 点的速度 $\boldsymbol{V}_{O'1}$ 在动坐标轴上的分解为 $\boldsymbol{V}_{O'1}=(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$. 这样一来,动坐标为 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ 的点在固定空间中各有速度,这速度参考于动坐标系采取如下表达式:

当 v 固定而 u 变动时,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}+\boldsymbol{V}_{O'}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r};$$

当 u 固定而 v 变动时,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}+\boldsymbol{V}_{O'_1}+\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r}.$$

由此我们可证明如下的关系式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}-\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega}_1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_{O'}}{\partial v}-\frac{\partial \boldsymbol{V}_{O'_1}}{\partial u}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V}_{O'_1}-\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{V}_{O'}. \tag{7}$$

实际上,我们可从原点 O 作 $O'x, O'y, O'z$ 的平行轴 Ox', Oy', Oz',并考察这个直角坐标系的运动,虽然它仅是绕 O 点的旋转. 因为当固定 v 时,它的旋转角速度在 x', y', z' 轴上的分解为 $\boldsymbol{\Omega}=(P, Q, R)$;当固定 u 时,则为 $\boldsymbol{\Omega}_1=(P_1, Q_1, R_1)$. 这就是我们在开头讨论的情形,所以(6)式成立. 再设 T, T_1 分别表示标架 $O'\{x, y, z\}$, $O\{x', y', z'\}$,并设一个固定点的位置向量关于 T 的分解为 $\boldsymbol{r}(u, v)=(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$,则

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}+\boldsymbol{V}_{O'}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}+\boldsymbol{V}_{O'_1}+\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r}=0. \tag{9}$$

将(8)式关于 v 微分,并利用(9)进行改写,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u\partial v}+\frac{\partial \boldsymbol{V}_{O'}}{\partial v}+\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{V}_{O'_1}\times\boldsymbol{\Omega}+(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{0},$$

同样地,将(9)式关于 u 微分,并利用(8)进行改写,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial v\partial u}+\frac{\partial \boldsymbol{V}_{O'_1}}{\partial u}+\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{V}_{O'}\times\boldsymbol{\Omega}_1+(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\Omega}_1=\boldsymbol{0}.$$

叫所得两式边边相减,我们得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_{O'_1}}{\partial u}-\frac{\partial \boldsymbol{V}_{O'}}{\partial v}+\boldsymbol{V}_{O'}\times\boldsymbol{\Omega}_1-\boldsymbol{V}_{O'_1}\times\boldsymbol{\Omega}$$
$$+\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_1}{\partial u}-\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial v}-\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{\Omega}\right)\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0},$$

注意到这时(6)式已成立,因此(7)式也成立.

2. 应用

为了把上述公式应用于曲面论，我们把动坐标系 x,y,z 的原点 O' 取在所讨论曲面的生成点，并把 z 轴取为曲面在 O'点的法线,则

$$\boldsymbol{V}_{O'}=(\xi,\eta,0),\boldsymbol{V}_{O'_1}=(\xi_1,\eta_1,0).$$

我们用 ds 表示 O'在曲面上所画的无穷小曲线弧长，并用 ω 表示 x 轴与所论曲线弧在原点的交角. 由于 O'点运动的无穷小向量为 $\boldsymbol{V}_{O'}du+\boldsymbol{V}_{O'_1}dv$,所以

$$\cos\omega\cdot ds=\xi du+\xi_1 dv,\ \sin\omega\cdot ds=\eta du+\eta_1 dv. \tag{1}$$

因而

$$ds^2=(\xi du+\xi_1 dv)^2+(\eta du+\eta_1 dv)^2$$

在 Oz'轴上从 O 点沿 $\boldsymbol{k}$ 方向截取单位长,记它的端点为 m,则 m点运动的无穷小向量应为

$$(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k})du+(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{k})dv$$
$$=(Qdu+Q_1dv,-Pdu-P_1dv,0).$$

所以,当我们把m点所画的无穷小曲线弧长记为$d\sigma$,而且把它与x轴在原点的交角记为θ时,则其间成立关系式

$$\cos\theta\cdot d\sigma=Qdu+Q_1dv,\ \sin\theta\cdot d\sigma=-Pdu-P_1dv,$$

也就是

$$d\sigma^2=(Qdu+Q_1dv)^2+(Pdu+P_1dv)^2.$$

这便是曲面的球面表示的线素. 由于 ω-θ 等于曲面线素与其对应

球面表示间的角度，我们得到下列关系式：

$$\sin(\omega-\theta)\cdot d\sigma=(Pdu+P_1dv)\cos\omega+(Qdu+Q_1dv)\sin\omega,$$

$$\cos(\omega-\theta)\cdot d\sigma=(Qdu+Q_1dv)\cos\omega-(Pdu+P_1dv)\sin\omega.$$

曲面在一点 O' 的切平面与它在邻近点 O'' 的切平面相交，这条交线的方向称为 $O'O''$ 方向的共轭方向（§14.3）．若记交线方向为 $(x,y,0)$，由于这方向和曲面在 O',O'' 两点的法线都垂直，所以 $du:dv$ 方向（即 $O'O''$ 方向）的共轭方向 $(x,y,0)$ 必定满足

$$(Pdu+P_1dv)y-(Qdu+Q_1dv)x=0.$$

设这个方向与 $O'x$ 轴的交角为 ω'，则

$$(Pdu+P_1dv)\sin\omega'-(Qdu+Q_1dv)\cos\omega'=0.$$

如果我们用 $\delta s,\delta u,\delta v$ 表示共轭方向的微分，由上

$$\delta s\cos\omega'=\xi\delta u+\xi_1\delta v,\ \delta s\sin\omega'=\eta\delta u+\eta_1\delta v,$$

于是共轭条件为

$$(P\eta-Q\xi)du\delta u+(P_1\eta_1-Q_1\xi_1)dv\delta v$$
$$+(P\eta_1-Q\xi_1)du\delta v+(P_1\eta-Q_1\xi)\delta udv=0.$$

因为这关系式关于 d,δ 是对称的，所以

$$(P\delta u+P_1\delta v)\sin\omega-(Q\delta u+Q_1\delta v)\cos\omega=0.$$

这个事实也可利用那个由 $\sin\theta\cdot d\sigma$，$\cos\theta\cdot d\sigma$ 的算式所导出的关系式

$$\cos(\omega'-\theta)d\sigma=(Qdu+Q_1dv)\cos\omega'-(Pdu+P_1dv)\sin\omega'$$

以及 $\omega'-\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 来证明.

自共轭方向，即渐近方向，则定义于

$$(P\eta-Q\xi)du^2+(P\eta_1-Q\xi_1+P_1\eta-Q_1\xi)du\,dv$$
$$+(P_1\eta_1-Q_1\xi_1)dv^2=0,$$

也就是

$$(Pdu+P_1dv)\sin\omega-(Qdu+Q_1dv)\cos\omega=0.$$

3. 曲率线 法曲率 测地曲率及 Laguerre 定理

在动坐标轴 z 上取一点

$$\boldsymbol{r}=(0,0,\rho).$$

它的无穷小运动向量相对于动轴 $O'x, O'y, O'z$ 可表为

$$\begin{aligned}&d\boldsymbol{r}+\boldsymbol{V}_{O'}du+\boldsymbol{V}_{O'1}dv+(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})du+(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r})dv\\&\quad=(\xi du+\xi_1 dv+(Qdu+Q_1dv)\rho,\\&\qquad\eta du+\eta_1 dv-(Pdu+P_1dv)\rho, d\rho).\end{aligned}$$

如果 O' 点沿曲率线的方向运动，则这无穷小向量必须与 z轴相切，所以对于曲率线来说应成立

$$\xi du+\xi_1 dv+(Qdu+Q_1dv)\rho=0,$$

$$\eta du+\eta_1 dv-(Pdu+P_1dv)\rho=0.$$

由此消去 ρ，我们得到曲率线的微分方程：

$$\begin{aligned}&(Pdu+P_1dv)(\xi du+\xi_1 dv)\\&\qquad+(Qdu+Q_1dv)(\eta du+\eta_1 dv)=0.\end{aligned}\qquad(1)$$

反之，如果从前面的两个方程消去 $du:dv$，则

$$\begin{aligned}&\rho^2(PQ_1-P_1Q)+\rho(Q\eta_1-Q_1\eta-\xi P_1+\xi_1 P)\\&\qquad+\xi\eta_1-\xi_1\eta=0,\end{aligned}$$

它的两根就是两个主曲率半径.

一般来说，若从原点 O 作一个单位向量使它与一条曲线的切线平行，并且把曲线的弧长 s 看作时间，则此单位向量端点的速度等于曲线的曲率$\frac{1}{r}$，而且速度的方向合于主法线的方向. 如果从原点 O' 作一单位向量使它与曲面上一条曲线的切线平行，则其端点关于 T_1 的分解为

$$\boldsymbol{T}=(\cos\omega, \sin\omega, 0).$$

而且端点的无穷小运动向量则为

$$
\begin{aligned}
&d\boldsymbol{T}+(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{T})du+(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{T})dv\\
&=(-\sin\omega d\omega-\sin\omega(Rdu+R_1dv),\\
&\quad\cos\omega d\omega+\cos\omega(Rdu+R_1dv),\\
&\quad\sin\omega(Pdu+P_1dv)-\cos\omega(Qdu+Q_1dv)).
\end{aligned}
$$

把曲线的主法向量 $\boldsymbol{N}$ 与 x,y,z 轴的交角分别记作 ξ',η',ζ'. 我们便有

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{ds}{r}\cos\xi',\ \frac{ds}{r}\cos\eta',\ \frac{ds}{r}\cos\zeta'\right)=\frac{1}{r}\boldsymbol{N}ds\\
&=(-\sin\omega(d\omega+Rdu+R_1dv),\\
&\quad\cos\omega(d\omega+Rdu+R_1dv),\\
&\quad\sin\omega(Pdu+P_1dv)-\cos\omega(Qdu+Q_1dv)).
\end{aligned}
$$

现在，用Π表示曲面的法向量与曲线主法向量之间的交角，则

$$
\begin{aligned}
\cos\xi'&=-\sin\omega\sin\Pi,\\
\cos\eta'&=\cos\omega\sin\Pi,\\
\cos\zeta'&=\cos\Pi,
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{\cos\Pi\cdot ds}{r}=\sin\omega(Pdu+P_1dv)-\cos\omega(Qdu+Q_1dv), \tag{2}
$$

$$
\frac{\sin\Pi\cdot ds}{r}=d\omega+Rdu+R_1dv. \tag{3}
$$

这两个公式的应用特别广泛. $\frac{\sin\Pi}{r}$是测地曲率(§21.2)，而$\frac{\cos\Pi}{r}$则是法曲率(§15.2)，所以测地线的微分方程应当是

$$
d\omega+Rdu+R_1dv=0. \tag{4}
$$

凡是使法曲率取极大或极小值的方向是曲率线方向，它由下列等式所定义:

$$
\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)=0.
$$

然而

$$\frac{\cos\Pi}{r}=\sin\omega\ \frac{Pdu+P_1dv}{ds}-\cos\omega\ \frac{Qdu+Q_1dv}{ds},$$

而且

$$\cos\omega=\frac{\xi du+\xi_1dv}{ds},\quad \sin\omega=\frac{\eta du+\eta_1dv}{ds},$$

或者由此解得$\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$:

$$\frac{du}{ds}=\frac{\eta_1\cos\omega-\xi_1\sin\omega}{\eta_1\xi-\eta\xi_1}, \frac{dv}{ds}=\frac{\xi\sin\omega-\eta\cos\omega}{\eta_1\xi-\eta\xi_1}.$$

所以关于 ω 的微分结果为

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{du}{ds}=\frac{-\eta_1\sin\omega-\xi_1\cos\omega}{\eta_1\xi-\eta\xi_1}, \frac{\partial}{\partial\omega}\frac{dv}{ds}=\frac{\xi\cos\omega+\eta\sin\omega}{\eta_1\xi-\eta\xi_1},$$

并且应用 $P\eta_1-P_1\eta-Q\xi_1+Q_1\xi=0$(此即在本节 1,公式(7)的 z 方向的分量式中令 $\zeta=0, \zeta_1=0$ 的结果)进行改写,便有

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)=2\cos\omega\ \frac{Pdu+P_1dv}{ds}+2\sin\omega\ \frac{Qdu+Q_1dv}{ds}.$$

现在我们在原点再作一个单位向量，使它平行于曲线的从法线,则当原点在所讨论的曲线上变动 ds 时，它的端点沿主法线方向变动$\frac{ds}{\rho}$. 把这个端点关于 T_1 的分解记作

$$\boldsymbol{B}=(\sin\omega\cos\Pi, -\cos\omega\cos\Pi, \sin\Pi).$$

而且把 s 看作时间,则它的速度向量为

$$-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{N}=\left(\frac{\sin\omega\sin\Pi}{\rho}, -\frac{\cos\omega\sin\Pi}{\rho}, -\frac{\cos\Pi}{\rho}\right).$$

一般说来,设一点关于标架 T,即 $O'\{x,y,z\}$ 的坐标为 $\boldsymbol{r}=(x, y,z)$,关于 T_1 的无穷小运动向量便具有如下的表达式:

$$d\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})du+(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{r})dv.$$

取 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{B}$,并且考察 z 方向的分量,我们得到

$$-\frac{\cos\Pi}{\rho}=\cos\Pi\frac{d\Pi}{ds}-\frac{Pdu+P_1dv}{ds}\cos\Pi\cos\omega$$
$$-\frac{Qdu+Q_1dv}{ds}\cos\Pi\sin\omega,$$

也就是

$$\frac{1}{\rho}+\frac{d\Pi}{ds}=\frac{Pdu+P_1dv}{ds}\cos\omega+\frac{Qdu+Q_1dv}{ds}\sin\omega. \tag{5}$$

因此成立

$$\frac{1}{\rho}+\frac{d\Pi}{ds}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right).$$

把$\frac{\cos\Pi}{r}$看成 u,v,ω 的函数，并作它的全微分：

$$d\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)du+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)dv+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)d\omega.$$

从(3)代入 $d\omega=\frac{\sin\Pi}{r}ds-(Rdu+R_1dv)$，便得到

$$d\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)\frac{\sin\Pi}{r}ds$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)-R\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)\right]du$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)-R_1\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)\right]dv.$$

这个方程的右侧可写成 Kds 的形式，其中 K 仅决定于曲线在所讨论点的切方向. 至于左侧，我们利用上面得到的关系

$$2\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d\Pi}{ds}\right)=\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)$$

进行改写，结果是：

$$d\left(\frac{\cos\Pi}{r}\right)-\frac{2\sin\Pi}{r}\left(\frac{ds}{\rho}+d\Pi\right)=Kds,$$

即

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}+\operatorname{tg}\Pi\left(\frac{2}{\rho}+3\frac{d\Pi}{ds}\right)=-\frac{Kr}{\cos\Pi}.$$

由此我们得到 Laguerre(1870)所发现的结果：

Laguerre 定理 在曲面上的同一点相切的所有曲线，在切点处保持着同一值：

$$\left(3\frac{d\Pi}{ds}+\frac{2}{\rho}\right)\frac{\sin\Pi}{r}-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\Pi. \tag{6}$$

4. 曲面的基本方程

设曲面上参数曲线的交角为 α，则它的线素应为

$$ds^2=E\,du^2+2\sqrt{EG}\cos\alpha\,du\,dv+G\,dv^2.$$

如果 m, n 分别表示 u, v 曲线在交点的切线与 x 轴的交角，那么 $n-m=\pm\alpha$. 取定 α，使其满足

$$n-m=\alpha,$$

于是

$$V_{O'}=(\xi,\eta,\zeta)=(\sqrt{E}\cos m,\ \sqrt{E}\sin m, 0),$$

$$V_{O'_1}=(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)=(\sqrt{G}\cos n, \sqrt{G}\sin n, 0).$$

把这些值代入本节 1 的公式(6),(7)，我们便得出下列关系式：

$$\frac{\partial P}{\partial v}-\frac{\partial P_1}{\partial u}=QR_1-Q_1R,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial v}-\frac{\partial Q_1}{\partial u}=RP_1-R_1P,$$

$$\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{\partial R_1}{\partial u}=PQ_1-P_1Q,$$

$$R=-\frac{\partial n}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{G}\sin\alpha}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\alpha-\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right), \tag{1}$$

$$R_1=-\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{E}\sin\alpha}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\alpha-\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right),$$

$$\sqrt{E}\,(P_1\sin m-Q_1\cos m)=\sqrt{G}\,(P\sin n-Q\cos n).$$

实际的计算如下. 从二方程

$$\frac{\partial\xi}{\partial v}-\frac{\partial\xi_1}{\partial u}=\eta R_1-\eta_1 R,\quad \frac{\partial\eta}{\partial v}-\frac{\partial\eta_1}{\partial u}=R\xi_1-R_1\xi$$

解出 R 与 R_1，就有(1)的前两式，而且最后的方程则来自关系式

$$P\eta_1-\eta P_1=Q\xi_1-Q_1\xi.$$

另一方面，将 ξ,η,ξ_1,η_1 的诸值代入本节 2 的公式(1)，结果是:

$$\cos\omega ds=\sqrt{E}\cos m du+\sqrt{G}\cos n dv,$$
$$\sin\omega ds=\sqrt{E}\sin m du+\sqrt{G}\sin n dv.$$

由此我们解出

$$\sqrt{E}\frac{du}{ds}=\frac{\sin(n-\omega)}{\sin\alpha},\qquad \sqrt{G}\frac{dv}{ds}=\frac{\sin(\omega-m)}{\sin\alpha}.$$

设由曲面上一点 (u,v) 到点 $(u+\delta u,v+\delta v)$ 的线素为 δs，而且所对应的 ω 角为 ω'，则

$$\cos(\omega-\omega')=\frac{Edu\delta u+\sqrt{EG}\cos\alpha(du\delta v+\delta u dv)+Gdv\delta v}{ds\delta s},$$

$$\sin(\omega-\omega')=\frac{\sqrt{EG}\sin\alpha(dv\delta u-\delta v du)}{ds\delta s}.$$

两方向 $du:dv$ 与 $\delta u:\delta v$ 共轭的条件是

$$\sqrt{E}(Q\cos m-P\sin m)du\delta u+\sqrt{G}(Q_1\cos n-P_1\sin n)dv\delta v$$
$$+\sqrt{E}(Q_1\cos m-P_1\sin m)\delta u dv+\sqrt{G}(Q\cos n-P\sin n)du\delta v$$
$$=0,$$

于是渐近曲线的方程为

$$\sqrt{E}(Q\cos m-P\sin m)du^2+\sqrt{G}(Q_1\cos n-P_1\sin n)dv^2$$
$$+\{\sqrt{E}(Q_1\cos m-P_1\sin m)+\sqrt{G}(Q\cos n-P\sin n)\}du\,dv$$
$$=0.$$

另外，当我们推导曲率线的微分方程时，要用到下列的关系式:

$$\sqrt{E}\cos m du+\sqrt{G}\cos n dv+(Q du+Q_1 dv)\rho=0,$$

$$\sqrt{E}\sin m du+\sqrt{G}\sin n dv-(P du+P_1 dv)\rho=0.$$

所以两主曲率半径决定于方程

$$\rho^2(PQ_1-P_1Q)-\rho[\sqrt{E}(P_1\cos m+Q_1\sin m)$$
$$-\sqrt{G}(P\cos n+Q\sin n)]+\sqrt{EG}\sin\alpha=0.$$

以 ρ_1,ρ_2 表示这方程的两根，我们有

$$\sqrt{EG}\sin\alpha\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)=\sqrt{E}(P_1\cos m+Q_1\sin m)$$
$$-\sqrt{G}(P\cos n+Q\sin n),$$

$$\frac{\sqrt{EG}\sin\alpha}{\rho_1\rho_2}=PQ_1-P_1Q=\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{\partial R_1}{\partial u}.$$

从(1)代入 R,R_1 于最后方程，计算的结果是

$$\frac{\sqrt{EG}\sin\alpha}{\rho_1\rho_2}=-\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\alpha}{\sqrt{E}\sin\alpha}\right]$$
$$-\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cos\alpha}{\sqrt{G}\sin\alpha}\right].$$

这个关系式与 Gauss 方程仅仅在形状上不同而已.

当参数曲线直交时，我们采取动坐标轴 x,y 使分别与 u,v 曲线相切. 这时

$$n=\frac{\pi}{2},\ m=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

于是我们得到

$$\sqrt{E}Q_1+\sqrt{G}P=0,\quad \frac{\partial P_1}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=Q_1R-QR_1,$$

$$R=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\quad \frac{\partial Q_1}{\partial u}-\frac{\partial Q}{\partial v}=R_1P-RP_1,$$

$$R_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\quad \frac{\partial R_1}{\partial u}-\frac{\partial R}{\partial v}=P_1Q-PQ_1,$$

前两方程实质上与 Codazzi 方程完全相同.

这时

$$\xi=\sqrt{E},\xi_1=0,\eta=0,\ \eta_1=\sqrt{G}.$$

对于曲面上的曲线,应成立

$$\cos\omega=\frac{\sqrt{E}\,du}{ds},\qquad \sin\omega=\frac{\sqrt{G}\,dv}{ds};$$

曲率线的微分方程是

$$\sqrt{E}P\,du^2+\sqrt{G}Q_1\,dv^2+(\sqrt{G}Q+\sqrt{E}P_1)\,du\,dv=0.$$

两主曲率半径所满足的二次方程则为

$$\rho^2\left(\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)-\rho\,(\sqrt{E}P_1-\sqrt{G}Q)+\sqrt{EG}=0.$$

由此立即可得 Gauss 的基本方程

$$\frac{\sqrt{EG}}{\rho_1\rho_2}=\frac{\partial R}{\partial v}-\frac{\partial R_1}{\partial u}=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

渐近曲线的微分方程是

$$\sqrt{E}Q\,du^2-\sqrt{G}P_1\,dv^2+(\sqrt{E}Q_1-\sqrt{G}P)\,du\,dv=0.$$

如果我们把曲率线取为参数曲线,则 $P=Q_1=0$, 这是由于上述的曲率线微分方程必须与 $du\,dv=0$ 一致的缘故. 因此

$$R=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\ \frac{\partial P_1}{\partial u}=-QR_1,\ \frac{\partial R}{\partial v}-\frac{\partial R_1}{\partial u}=-QP_1,$$

$$R_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\ \frac{\partial Q}{\partial v}=RP_1.$$

曲面的球面表示的线素 $d\sigma^2$ 决定于公式

$$d\sigma^2=Q^2du^2+P_1^2\,dv^2,$$

所以两个主曲率半径 ρ_1,ρ_2 是

$$\rho_1=-\frac{\sqrt{E}}{Q},\qquad \rho_2=\frac{\sqrt{G}}{P_1},$$

而且曲面的线素则为

$$ds^2=\rho_1^2Q^2du^2+\rho_2^2P_1^2dv^2.$$

这时，渐近曲线的微分方程是

$$\sqrt{E}\,Q\,du^2-\sqrt{G}\,P_1\,dv^2=0,$$

也就是

$$\frac{\cos^2\omega}{\rho_1}+\frac{\sin^2\omega}{\rho_2}=0.$$

这时我们还可把 Codazzi 方程改写为

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial v}=\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial v}(\rho_2-\rho_1),$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial u}=-\frac{1}{P_1}\frac{\partial P_1}{\partial u}(\rho_2-\rho_1),$$

而且成立关系式

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{P_1}\frac{\partial Q}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial P_1}{\partial u}\right)+QP_1=0.$$

5. Beltrami 定理与 Bonnet 定理

我们从本节 3 的公式(5)和(6)知道，对于在曲面上给定点切于同一条切线的所有曲面曲线来说，以下两个量

$$\frac{1}{\rho}+\frac{d\Pi}{ds},\ \frac{\cos\Pi}{r^2}\frac{dr}{ds}+\frac{\sin\Pi}{r}\left(\frac{2}{\rho}+3\frac{d\Pi}{ds}\right) \tag{1}$$

各取同一个数值. 现在我们特取 Π 等于直角. 这时，在所讨论点的密切平面与曲面在同一点的切平面相重合，也就是给定的切线方向是渐近方向. 如果我们把第一条曲线取为在此点切于这渐近方向，并且它在这点的密切平面与曲面在同一点的切平面相重合的曲线，而把第一条曲线取为在此点切于这渐近方向的渐近曲线，则

$$\frac{1}{\rho}+\frac{d\Pi}{ds}=\frac{1}{\rho_0},\quad \frac{1}{r}\left(\frac{2}{\rho}+3\frac{d\Pi}{ds}\right)=\frac{2}{r_0\rho_0}, \tag{2}$$

式中，r_0，ρ_0 分别表示所讨论渐近曲线的曲率半径和挠率半径. 从(2)消去$\frac{d\Pi}{ds}$，我们得到

$$\frac{1}{\rho}-\frac{3}{\rho_0}=-\frac{2r}{r_0\rho_0}. \tag{3}$$

如果我们把第一条曲线取得特殊一些，即在曲面和切平面交线中取一个与所述渐近方向相切的分支，那么$\frac{1}{\rho}=0$，所以我们从(3)得到

$$r=\frac{3}{2}r_0. \tag{4}$$

这样，我们证明了（§16，习题6）

Beltrami 定理 *在曲面的一条渐近曲线上一点 M 作曲面的切平面使与曲面相交，则在其交线中与这条渐近曲线相切的一个分支在 M 点的曲率半径，等于渐近曲线在 M 的曲率半径的 $\frac{3}{2}$.*

其次，由本节3的公式(5)我们知道，渐近曲线的挠率

$$\frac{1}{\rho_0}=\frac{Pdu+P_1dv}{ds}\cos\omega+\frac{Qdu+Q_1dv}{ds}\sin\omega.$$

然而渐近曲线的微分方程是

$$0=\frac{Pdu+P_1dv}{ds}\sin\omega-\frac{Qdu+Q_1dv}{ds}\cos\omega,$$

所以

$$\frac{Pdu+P_1dv}{ds}-\frac{\cos\omega}{\rho_0}=0,$$

$$\frac{Qdu+Q_1dv}{ds}-\frac{\sin\omega}{\rho_0}=0.$$

再利用 $\sin\omega ds$ 与 $\cos\omega ds$ 的表达式把它们改写为

$$\left(P-\frac{\sqrt{E}\cos m}{\rho_0}\right)du+\left(P_1-\frac{\sqrt{G}\cos n}{\rho_0}\right)dv=0,$$

$$\left(Q-\frac{\sqrt{E}\sin m}{\rho_0}\right)du+\left(Q_1-\frac{\sqrt{G}\sin n}{\rho_0}\right)dv=0.$$

由此消去 $du:dv$，并注意到

$$P\eta_1-P_1\eta-Q\xi_1+Q_1\xi=P\sqrt{G}\sin n-P_1\sqrt{E}\sin m$$
$$+Q_1\sqrt{E}\cos m-Q\sqrt{G}\cos n=0,$$

我们就能推得

$$(PQ_1-P_1Q)\rho_0^2+\sqrt{EG}\sin\alpha=0.$$

因此，我们又重新得出一个结果（§19.3）：

$$\rho_0=\pm\sqrt{-\rho_1\rho_2}, \tag{5}$$

式中 ρ_1,ρ_2 表示曲面在所讨论点的两个主曲率半径.

由(3)与(5)我们得到（§16，习题8）

Bonnet 定理 在曲面的一条渐近曲线的一点 O' 作曲面的另一条曲线，使它与这条渐近曲线在 O' 相切，并且它在 O' 的密切平面与曲面在 O' 的切平面重合. 设 r,ρ 分别表示曲线在 O' 的曲率半径与挠率半径，r_0 表示渐近曲线在 O' 的曲率半径，且 ρ_1,ρ_2 为曲面在 O' 的两主曲率半径，则

$$\frac{r}{r_0}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\rho}\sqrt{-\rho_1\rho_2}. \tag{6}$$

最后，我们来求 r_0. 对于所讨论的渐近线，

$$\frac{\sin^2\omega}{\rho_2}+\frac{\cos^2\omega}{\rho_1}=0,$$

所以

$$\cos\omega=\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1-\rho_2}},\qquad \sin\omega=\frac{\sqrt{-\rho_2}}{\sqrt{\rho_1-\rho_2}},$$

$$\operatorname{tg}\omega=\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

但是

$$\frac{ds}{r_0}=d\omega+Rdu+R_1dv,$$

从而

$$\frac{1}{r_0}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{ds}+R\frac{du}{ds}+R_1\frac{dv}{ds},$$

式中的$\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$应由 ω 的函数替换. 于是

$$\frac{1}{r_0}=\frac{\cos\omega}{\sqrt{E}}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\sin\omega}{\sqrt{G}}\frac{\partial\omega}{\partial v}+R\frac{\cos\omega}{\sqrt{E}}+R_1\frac{\sin\omega}{\sqrt{G}}.$$

另一方面，根据 Codazzi 方程，

$$\frac{R}{\sqrt{E}}=\frac{\rho_2}{\sqrt{G}\,\rho_1}\frac{\frac{\partial\rho_1}{\partial v}}{\rho_1-\rho_2},\quad \frac{R_1}{\sqrt{G}}=-\frac{\rho_1}{\sqrt{G}\,\rho_2}\frac{\frac{\partial\rho_2}{\partial u}}{\rho_1-\rho_2},$$

因此，

$$\frac{1}{r_0}=\frac{\cos\omega}{\sqrt{E}}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{\cos^2\omega\sin\omega}{\sqrt{E}}\frac{\partial\ln\rho_2}{\partial u}+\frac{\sin\omega}{\sqrt{G}}\frac{\partial\omega}{\partial v}$$

$$-\frac{\sin^2\omega\cos\omega}{\sqrt{G}}\frac{\partial\ln\rho_1}{\partial v},$$

也就是

$$\frac{1}{r_0}=\frac{\cos^2\omega\sin\omega}{\sqrt{E}}\frac{\partial\ln(\rho_2\operatorname{tg}\omega)}{\partial u}-\frac{\sin^2\omega\cos\omega}{\sqrt{G}}\frac{\partial\ln(\rho_1\operatorname{ctg}\omega)}{\partial v}.$$

于此代入 $\sin\omega$, $\cos\omega$ 的值，我们得到

$$\frac{(\rho_1-\rho_2)^{\frac{3}{2}}}{r_0}=\frac{\rho_1^2}{2(-\rho_2)^{\frac{5}{2}}}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\rho_2^3}{\rho_1}\right)-\frac{\rho_2^2}{2\rho_1^{\frac{5}{2}}}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\rho_1^3}{\rho_2}\right),$$

就是

$$\frac{1}{r_0}=\frac{4(-\rho_1\rho_2)^{\frac{7}{8}}}{(\rho_1-\rho_2)^{\frac{3}{2}}}\left[-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\rho_1}{\rho_2^3}\right)^{\frac{1}{8}}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\rho_2}{\rho_1^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right].$$

这是关于渐近曲线曲率的 Bonnet 公式.

总　习　题

1. 设动点的平行坐标为

$$Ax=(a+u)^3,\qquad By=(b+u)^3,\qquad Cz=(c+u)^3,$$

则它的轨迹是一条三次挠曲线，并且在这曲线上任何两点连线的中点轨迹是一个曲面，它的渐近曲线的方程是 $u\pm v=$ 常数.

2* 经过曲面在一点的给定切线作平面，并在此点作平面与曲面截线的曲率圆. 能在这点至少成四点接触的截线，对于给定切线来说一般只有一条. 如所讨论的点不是脐点，经过此点而与曲面在此点至少成五点接触的圆一般有十个. (Darboux, 1880)

3. 在曲面的非抛物点 P 作给定切线 t 的附属 Moutard 织面（§15，习题6），并且由 P 引它的直径 d 与 t 对应. 当 t 在点 P 的周围变动时，d 的轨迹是一个四次三阶的代数锥面，而且这锥面有三尖线，它的三个切平面相会于仿射法线（即 P 与Lie织面中心的连线），并以曲面的切平面为二重切平面. (苏步青, 1929)

4. 在曲面的非抛物点 P 引给定的切线 t，并作经过 t 的平面与曲面相交. 当此平面在 t 周围旋转时，交线在切点 P 的密切抛物线画出一个抛物线柱面. 如果 t 在 P 的周围变动，则经过 P 所作的柱面的直径平面必包络成苏氏锥面. (窪田忠彦　Kubota, 1930)

5*. 设曲面的一族曲率线都是平面曲线，则沿其中任何一条曲率线所作的另一族曲率线密切平面的包络为柱面(Raffy, 1903).

6*. 设曲面上的两族曲率线为 (C)，(C')，经过一点 m 的各曲率线分别记为 C,C'. 在 C 的各点作族 (C') 中各曲率线的密切平面，设 L 是它们的包络可展曲面在点 m 的母线，而 L' 则为 (C)，(C') 互换时的对应母线. 证明 L 与 L' 垂直(Bricard, 1903). 上题的 Raffy 定理原是本定理的特殊情形.

7*. 设在曲面上有一个两参数的曲线族 $\mathscr{S}$，它具备以下两条件：(1) 族 $\mathscr{S}$ 中任何三条曲线所构成三角形 ABC 的角盈 $\varepsilon=A+B+C-\pi$，与所包围的曲面表面积成比例；(2) 存在曲面到平面的点对应，使 $\mathscr{S}$ 中的两参数曲线族对应于平面上的直线族. 试求这曲面的线素. (J. Douglas, 1940)

8*. 设曲面上的两参数曲线族 $\mathscr{S}$ 满足下列两条件：(1) 对于族 $\mathscr{S}$ 中任何三条曲线所构成的三角形 ABC，它的角盈 $\varepsilon=A+B+C-\pi$ 与所包围的曲面

表面积成比例；(2) 存在此曲面到其他曲面的点对应，使$\mathscr{S}$的两参数曲线族对应于其他曲面上的测地线族. 试求此曲面的线素(苏步青，1943).

9*. 证明：曲面的第二基本量 L, M, N 可用第一基本量 E, F, G，平均曲率H，以及它们的导数表示. (T. Y. Thomas, 1945)

10. 设α为旋转曲面上一条测地线与子午线的交角，而r为经过交点的平行环半径，则$r\sin\alpha$等于常数. (Clairaut, 1733)

11*. 设曲面的一族曲率线都是平面曲线. 假如其中一条曲率线为圆，则其他曲率线也都为圆. (Aouts)

12*. 设曲面的一族曲率线都是平面曲线. 假如其中一条曲率线为代数曲线，则其他曲率线也是代数曲线. (Darboux, Lecons IV)

13. 将一个椭圆在给定直线上转动，但不使其滑动. 它的焦点所画的平面曲线的曲率半径R，以及它的法线被曲线与定直线所夹的部分长度N必定满足关系式

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{N}=\text{常数}.$$

将此平面曲线绕给直线旋转时，所生成的旋转曲面必有常平均曲率.

(Delaunay)

14. 决定一个曲面，使从一条给定曲线上各点所作的包络锥面与要求的曲面相切于一条平面曲线. 并且证明：相切的这族平面曲线的共轭曲线也是平面曲线的充要条件是给定的已知曲线为直线. (苏步青，1928)

第三章　线　汇　论

§ 32. 直　纹　面

1. 一些重要元素

在前面的 § 11. 1 中，我们已详细介绍过直纹面的定义和表示方法. 为了以后要用，我们把它的重要元素再叙述一下.

在一个直纹面上选定一条曲线 C，使它与所有的母线相交，而且以这曲线的弧长 v 为参数把曲线表示为

$$\boldsymbol{a}(v)=(f(v),g(v),h(v)),$$

则

$$|\boldsymbol{a}'(v)|^2=f'^2(v)+g'^2(v)+h'^2(v)=1.$$

设通过曲线 C 上一点 v 的母线的单位方向为

$$\boldsymbol{l}(v)=(p(v),q(v),r(v)),$$

那么直纹面的方程就可写为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{a}(v)+u\boldsymbol{l}(v).$$

直纹面在这种方法表示中的曲线 C 称为**准线**. 以后我们总假定上面出现的诸分量函数具有直至三阶的连续导数.

准线与母线的交角 θ 是 v 的函数，对此自然有

$$\cos\theta=\boldsymbol{a}'(v)\cdot\boldsymbol{l}(v),$$

所以直纹面的线素是

$$ds^2=du^2+2\cos\theta\,du\,dv+(a^2u^2+2bu+1)\,dv^2,$$

式中

$$a^2=\boldsymbol{l}'(v)\cdot\boldsymbol{l}'(v),\quad a>0,$$

$$b=\boldsymbol{l}'(v)\cdot\boldsymbol{a}'(v).$$

现在取直纹面的两条邻近的母线，并作它们的公垂线. 当两条母线无限接近时，称垂足的极限位置为此母线的**中心**，而且称一个直纹面的母线中心的轨迹为**缔括线**.

设两条相邻的母线对应于 v 与 $v+\delta v$，设它们的单位方向分别为 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{l}+\delta\boldsymbol{l}$，并设公垂线的单位方向是

$$\boldsymbol{n}=(\lambda,\mu,\nu),$$

则

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0,$$
$$(\boldsymbol{l}+\delta\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

于是 $\boldsymbol{n}$ 平行于方向 $\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{l}+\delta\boldsymbol{l})=\boldsymbol{l}\times\delta\boldsymbol{l}$. 由于 $\delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}'(v)\delta v+\cdots$，式中未写出的向量其分量是 δv 的高阶无穷小，而且

$$(\boldsymbol{l}(v)\times\boldsymbol{l}'(v))^2=(\boldsymbol{l}(v))^2(\boldsymbol{l}'(v))^2-(\boldsymbol{l}(v)\cdot\boldsymbol{l}'(v))^2$$
$$=(\boldsymbol{l}'(v))^2=a^2,$$

所以可把 $\boldsymbol{n}$ 取为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{a}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l}'+\boldsymbol{\varepsilon},$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ 的各分量关于 δv 至少是一阶无穷小量.

两相邻的母线与它们的公垂线相交于两点，设这两个垂足分别设为 $\bar{\boldsymbol{r}}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}+\delta\bar{\boldsymbol{r}}=(\bar{x}+\delta\bar{x},\bar{y}+\delta\bar{y},\bar{z}+\delta\bar{z})$，并且两垂足间的公垂线长为 Δ，则

$$\Delta=\frac{\delta\bar{x}}{\lambda}=\frac{\delta\bar{y}}{\mu}=\frac{\delta\bar{z}}{\nu},$$

$$\Delta=\boldsymbol{n}\cdot\delta\bar{\boldsymbol{r}}.$$

现在让我们从准线 C 上的点 v 且沿一条母线量到点 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，设其间的距离为 $\bar{u}$；从 C 上的点 $v+\delta v$ 沿相邻的另一条母线量到点 $(\bar{x}+\delta\bar{x},\bar{y}+\delta\bar{y},\bar{z}+\delta\bar{z})$ 的距离为 $\bar{u}+\delta\bar{u}$. 那么容易知道

$$\delta\bar{\boldsymbol{r}}=\{\boldsymbol{a}'(v)+\bar{u}\boldsymbol{l}'(v)\}\delta v+\boldsymbol{l}(v)\delta\bar{u}+\boldsymbol{\sigma},$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 的分量至少是关于 δv 的二阶无穷小.

因此,

$$\Delta=\frac{1}{a}(\boldsymbol{a}'(v),\boldsymbol{l}(v),\boldsymbol{l}'(v))\delta v+\varepsilon\delta v,$$

其中 ε 至少是关于 δv 的一阶无穷小.

现在记

$$P=\frac{1}{a}(\boldsymbol{a}'(v),\boldsymbol{l}(v),\boldsymbol{l}'(v)),$$

则

$$P^2=\frac{1}{a^2}(\boldsymbol{a}'(v),\boldsymbol{l}(v),\boldsymbol{l}'(v))^2$$

$$=\frac{1}{a^2}\begin{vmatrix}1 & \cos\theta & b\\ \cos\theta & 1 & 0\\ b & 0 & a^2\end{vmatrix}=\frac{a^2\sin^2\theta-b^2}{a^2}.$$

$\frac{P}{a}$称为直纹面的**配分参数**. 根据 § 11.2 的结果我们知道, 这直纹面要成为可展曲面的充要条件是 $P\equiv 0$. 凡是非可展的直纹面均称为**斜曲面**.

由于母线的中心在相邻的两母线上,

$$\boldsymbol{l}\cdot\delta\bar{\boldsymbol{r}}=0,$$

$$(\boldsymbol{l}+\delta\boldsymbol{l})\cdot\delta\bar{\boldsymbol{r}}=0,$$

所以

$$\frac{\delta\boldsymbol{l}}{\delta v}\cdot\frac{\delta\bar{\boldsymbol{r}}}{\delta v}=0.$$

因此在极限位置时,

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{dv}\cdot\frac{d\boldsymbol{l}}{dv}=0,$$

$$a^2\bar{u}+b=0,$$

或者

$$\bar{u}=-\frac{b}{a^2}. \tag{1}$$

这就是决定中心位置的公式，也就是表示缩括线的公式. 可展曲面的缩括线在最一般的情形下是曲面的刃线.

2. 一些定理

Chasles 定理 *在斜曲面上的一点M所作的切平面必定经过M所在的母线. 当M沿此母线变动而决定一个点列时，对应的切平面则以母线为轴决定了一个平面束，并且点列与平面束之间的对应是射影对应.*

证明 记$\rho=(\xi,\eta,\zeta)$为切平面上的动点坐标，则曲面在点(u,v)的切平面决定于

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a}-u\boldsymbol{l},\boldsymbol{l},\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')=0,$$

也就是

$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{l},\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')=0,$$

而且

$$(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}')\neq 0.$$

当点(u,v)在母线上变动时，上列平面绕母线作旋转，从而平面与点之间的对应是射影的. 证毕.

特别地，如果我们把直纹面的缩括线取做准线，于是

$$b=\boldsymbol{a}'(v)\cdot\boldsymbol{l}'(v)=0.$$

在母线的中心$(u=0)$及点u分别作直纹面的切平面，设它们之间的交角为φ，则

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{au}{P}=\frac{au}{\sin\theta}.$$

实际上，所述的两个切平面分别决定于

$$[(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{l},\boldsymbol{a}')\equiv](\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}')=0,$$

$$[(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{l},\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')]\equiv(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a})\cdot[\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')]=0.$$

因此

$$\cos\varphi=\frac{[\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')]\cdot(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}')}{\sqrt{[\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')]^2\cdot(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}')^2}}.$$

但是

$$(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}')^2=(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l})\cdot(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{a}')-(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{a}')^2=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta,$$

$$(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l}')\cdot(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}')=(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{a}')-(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{a}')(\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{l})=0,$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')]^2&=(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l})\cdot[(\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')\cdot(\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')]\\&\quad-[\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')]^2\\&=1+a^2u^2-\cos^2\theta=\sin^2\theta+a^2u^2,\end{aligned}$$

所以

$$\cos\varphi=\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+a^2u^2}}.$$

因而我们得到

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{au}{\sin\theta}.$$

我们把这个事实写成如下:

定理 *在斜曲面的一条母线上任取一点M，设C为此母线的中心. 那么曲面在M与C的两切平面之间交角的正切同M、C两点间的距离成正比.*

斜曲面上的一族渐近曲线自然是它的母线. 为了决定另外一族渐近曲线的微分方程,我们来计算第二基本量:

$$L=0,$$

$$\begin{aligned}M&=\frac{1}{\sqrt{a^2u^2+2bu+\sin^2\theta}}(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{l},\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}')\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2u^2+2bu+\sin^2\theta}}(\boldsymbol{l}',\boldsymbol{l},\boldsymbol{a}'),\end{aligned}$$

$$N=\frac{1}{\sqrt{a^2u^2+2bu+\sin^2\theta}}(\boldsymbol{a}''+u\boldsymbol{l}'',\boldsymbol{l},\boldsymbol{a}'+u\boldsymbol{l}').$$

所以我们可把所求的微分方程 $2M\,du+N\,dv=0$ 改写为下列形式:

$$\frac{du}{dv}+Au^2+2Bu+C=0,$$

这里的 A,B,C 仅仅是 v 的函数. 这是 Riccati 型的微分方程,它的任何四个解 u_1,u_2,u_3,u_4 之间总成立关系式

$$\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}:\frac{u_1-u_4}{u_2-u_4}=\text{常数}.$$

因此,我们得到(§15, 习题 1)

Serret 定理 斜曲面的四条渐近曲线与一条母线的四个交点所组成的交比是(与所取母线无关的)常数.

下面,我们取空间中的两个曲面,而且假定这两个曲面互为变形并各有一族渐近曲线互相对应. 把互相对应的一族渐近曲线取为参数曲线 u,而把与其直交的曲线取为参数曲线 v. 设两曲面上具相同参数值 (u,v) 的两点为对应点;并设 $E,F,G;L,M,N;E,F,G;L_1,M_1,N_1$ 分别为两曲面的基本量. 这时,在对应点有相同的总曲率,于是

$$L=L_1=0,\quad F=0,\quad M=\pm M_1,$$

然而我们关于第一个曲面写出它的 Codazzi 方程

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{M}{\sqrt{EG}}+\frac{\partial\ln G}{\partial u}\frac{M}{\sqrt{EG}}+\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{N}{\sqrt{EG}}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{N}{\sqrt{EG}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{M}{\sqrt{EG}}-\frac{\partial\ln E}{\partial v}\frac{M}{\sqrt{EG}}+\frac{\partial\ln\sqrt{E}}{\partial u}\frac{N}{\sqrt{EG}}=0,$$

而且关于第二个曲面的方程形式完全是一样的,所以

$$N_1=\pm N$$

或者

$$\frac{\partial E}{\partial v}=0,\quad \text{即}\quad E=f(u).$$

如果前一情形成立,则两曲面不是互相重合,就是互相对称. 如果

是后一情形成立，则参数曲线 u 不仅为渐近曲线，而且是测地线．所以必须为直线．我们取 u 的适当函数为新的参数 u，使得 $E=1$，则Codazzi 方程就化为

$$\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{G}M)=0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{N}{\sqrt{G}}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{M}{\sqrt{G}}.$$

适当取新的参数 v，可使 $M=\frac{1}{\sqrt{G}}$，但这里必须除去 $M\equiv 0$ 的情形，也就是必须假定曲面为不可展的．于是从第二个方程我们得到

$$\frac{N}{\sqrt{G}}=\int\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{G}\right)du+\varphi(v),$$

式中的 $\varphi(v)$ 为任意函数．这样，我们已证明了 Bonnet **定理** (1867)：

为了使一个曲面的一族渐近曲线能对应于变形曲面的一族渐近曲线，这个曲面必须为直纹面，而且这个条件也是充分的．但是重合或对称不在变形之列．

3. Minding 关于直纹面变形的研究

如前所述，直纹面的线素具有如下的形式：

$$ds^2=du^2+2\cos\theta\, du\, dv+(a^2u^2+2bu+1)dv^2.$$

如果改写母线上的单位向量 $\boldsymbol{l}$ 为

$$\boldsymbol{l}=(\cos\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi),$$

于是等式 $a^2=\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{l}'$ 就化为

$$\varphi'^2+\psi'^2\cos^2\varphi=a^2.$$

然后，根据 $\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{a}'=1, \boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{a}'=b, \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{a}'=\cos\theta$，我们解出 $\boldsymbol{a}'$：

$$\boldsymbol{a}'=\cos\theta\boldsymbol{l}+\frac{1}{a^2}\left[b\boldsymbol{l}'\pm\sqrt{a^2\sin^2\theta-b^2}(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l}')\right],$$

其中，φ 为任何函数，而

$$\psi=\int\frac{\sqrt{a^2-\varphi'^2}}{\cos\varphi}dv,$$

所以适当地选取函数 φ 时，总能使 φ 与 ψ 之间的关系为任意给定的形式 $F(\varphi,\psi)=0$.

如果我们从原点作直纹面母线的平行线，把所得的锥面称为**准锥**,那么就得到

Minding 定理 *任意选定准锥，总可把一个直纹面进行变形而使准锥保持不变.*

4. Beltrami 关于直纹面变形的研究

在本段中，我们仍用 θ 表示准线 $\boldsymbol{a}(v)$ 与母线的交角，而准线的密切平面与曲面切平面的交角则改用 σ，并用熟知的记号 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$ 表示准线上的活动标架，则母线上的单位向量

$$\boldsymbol{l}=\cos\theta\boldsymbol{T}+\sin\theta(\cos\sigma\boldsymbol{N}+\sin\sigma\boldsymbol{B}).$$

将此式代入以前所得的方程

$$\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{a}'=b,\quad \boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{l}'=a^2,$$

我们就得到

$$\frac{\cos\sigma}{r}=-\frac{b}{\sin\theta}-\theta',$$

$$\left[\frac{\cos\theta}{r}+(\cos\sigma\sin\theta)'-\frac{\sin\sigma\sin\theta}{\rho}\right]^2+\left[(\sin\sigma\sin\theta)'+\frac{\cos\sigma\sin\theta}{\rho}\right]^2=a^2-b^2.$$

在所讨论的问题中，θ、a、b 都是给定的函数，而准线的曲率半径 r，挠率半径 ρ 以及交角 σ 则为待定的函数. 由上列两方程中的前者解出 σ，并将其结果代入后一方程，我们可得准线的 r，ρ 之间的关系式

$$f\left(v, r, \rho, \frac{dr}{dv}\right)=0,$$

解此可得已知直纹面的所有变形直纹面.

我们把这个方法用于研究下列问题.

将一个直纹面变形，使原曲面上的一条已知曲线变成变形直纹面上的一条渐近曲线.

由 $\boldsymbol{a}(v)$ 所表示的准线要成为渐近曲线，这时 $\sigma=0$ 或 $\sigma=\pi$，于是上列第一个方程化为

$$\frac{1}{r}=\mp\left(\frac{b}{\sin\theta}+\theta'\right),$$

第二个方程则为

$$\left(\frac{\cos\theta}{r}\pm\theta'\cos\theta\right)^2+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}=a^2-b^2.$$

由此

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}b^2+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}=a^2-b^2,$$

也就是

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta-b^2}}{\sin^2\theta}.$$

因此，我们得到：$\boldsymbol{a}(v)$ 所表示的曲线要变形为渐近曲线，它的自然方程是

$$\frac{1}{r}=\mp\left(\frac{b}{\sin\theta}+\theta'\right),\ \frac{1}{\rho}=\pm\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta-b^2}}{\sin^2\theta}.$$

所以我们有下列定理：

对于一个直纹面，我们总能使它变形，以致其上的一条已知曲线变成变形直纹面的渐近曲线.

特别地，当原曲线是一条测地线时，变形后所得的渐近曲线必定化为直线，所以我们又得到下面的定理：

直纹面的一条测地线经曲面变形后，可变成变形直纹面的一

条直线.

取此直线为 z 轴，记

$$\boldsymbol{a}(v)=(0,0,v),$$

$$\boldsymbol{l}(v)=(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

则关系式 $\boldsymbol{l}'\cdot\boldsymbol{l}'=a^2$ 化为

$$\theta'^2+\varphi'^2\sin^2\theta=a^2,$$

于是

$$\varphi=\int\frac{\sqrt{a^2-\theta'^2}}{\sin\theta}dv.$$

因此，所求的曲面为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=$$

$$\left(u\sin\theta\cos\left(\int\frac{\sqrt{a^2-\theta'^2}}{\sin\theta}dv\right), u\sin\theta\sin\left(\int\frac{\sqrt{a^2-\theta'^2}}{\sin\theta}dv\right), v+u\cos\theta\right).$$

特别地，如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$，则原直纹面是准线的从法线曲面. 这时

$$\varphi=\int\frac{dv}{\rho}.$$

特别是，当我们把准线 $\boldsymbol{a}(v)$ 取为定挠率的曲线时，原直纹面就可变形为正螺面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\left(u\cos\frac{v}{k}, u\sin\frac{v}{k}, v\right)$$

式中，$k=\rho$（常数）. 曲面的线素是

$$ds^2=du^2+\left(\frac{u^2}{k^2}+1\right)dv^2,$$

如果我们要决定与这正螺面互为变形的曲面，必须令

$$a=\frac{1}{k},\quad b=0,\quad \theta=\frac{\pi}{2},\quad \sigma=\frac{\pi}{2},$$

于是

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{k}=\text{常数}.$$

因此就得到下列定理:

凡与正螺面互为变形的直纹面必定是由挠率为常数的空间曲线的从法线所构成.

5. Bonnet 定理

关于直纹面的变形还有一个重要的结果,就是:

Bonnet 定理 *设两个斜曲面互为变形,且它们不是同一个织面的两个变形曲面,则双方的母线全体必定互相对应.这个例外情形仅限于织面的两系母线分别对应于两斜曲面的母线的时候.*

设两个斜曲面 S,S_1 互为变形,设对应点有同一对参数值(u,v),而且:$u=$常数表示S的母线,$v=$常数表示 S_1 的母线. 我们假定,这两系母线在变形之下不是互相对应的. 从假设得知,S 与 S_1 具有完全一致的第一基本量 E、F、G,但它们的第二基本形式则各取形式

$$\begin{aligned}&L du^2+2M du dv+N dv^2,\\&L_1 du^2+2M_1 du dv+N_1 dv^2.\end{aligned}\tag{1}$$

因为 $u=$常数与 $v=$常数分别为S与 S_1 上的母线,从而是渐近曲线,$N=0,L_1=0$. 另一方面,S上的曲线 $v=$常数与 S_1 上的曲线 $u=$常数都是测地线,所以

$$\Gamma_{22}^1=0,\quad \Gamma_{11}^2=0.\tag{2}$$

于是,我们可以把曲面 S_1 的 Codazzi 方程

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M_1}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\Gamma_{22}^2\frac{L_1}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$-2\Gamma_{12}^2\frac{M_1}{\sqrt{EG-F^2}}+\Gamma_{11}^2\frac{N_1}{\sqrt{EG-F^2}}=0$$

改写为简单的形式

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{M_1}{\sqrt{EG-F^2}}+2\Gamma_{12}^2\frac{M_1}{\sqrt{EG-F^2}}=0. \tag{3}$$

从 Gauss 方程又得

$$M_1=\pm M.$$

另一方面，曲面 S 的 Codazzi 方程

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}+\Gamma_{22}^1\frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$-2\Gamma_{12}^1\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}+\Gamma_{11}^1\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}=0,$$

这时也化简为

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}+2\Gamma_{12}^1\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}=0. \tag{4}$$

然而(3)，(4)也可看成是 $L=0$，$N=0$ 时的 Codazzi 方程，而且 Gauss 方程这时仍旧成立，所以，E、F、G、$L\equiv 0$、M、$N\equiv 0$ 是一个曲面 S_2 的基本量，并且以相同 (u,v) 值的点作对应可把 S、S_1 变形成 S_2. 这时，$u=$常数与 $v=$常数这两族曲线既是 S_2 上的渐近曲线，又是 S_2 上的测地线，所以必定是直线. 因此，S_2 必定为织面，而且它的两族母线分别与 S，S_1 上的母线互相对应，这便是定理中所说的例外情形. 这样，证明了定理.

习 题

1. 证明关于直纹面母线的等角曲线成立下列定理：1° 母线的四条直交曲线与任何一条母线的四个交点有常值的交比. 2° 设母线的四条等角曲线有相等的交角，则只有当此交角为直角时才有上述的性质. 3° 除了极小正螺面以外，任何的等角曲线系统都不能由渐近曲线所组成. 4° 若有一族曲线 (C) 分割各条母线为相等的线段，则 (C) 的直交系统也有这性质，而且只有这直交系统中的曲线才决定母线上的射影分割. (Bioche)

2. 直纹面在一条母线上与中心等距的两点有相等的总曲率，而且它总

曲率的绝对值在中心取到极大值.

3. 证明：在直纹面的母线上除了中心外，其他的点都可组成点对，使得各对点的切平面互相垂直，每对点在中心的两侧，而且它们各至中心的距离乘积等于常数.

4. 证明：直纹面的法线沿它的一条母线画成一个双曲抛物面.

5. 设两个斜曲面有一条公共直线 g，而且两曲面在 g 上的两点 P、Q 所作的切平面成定角，则 P、Q 之间的对应是一个对合.

(Kubota, Takasu, 1938)

6*. 凡是与旋转面互相变形的直纹面，必定能变形为正螺面或单叶旋转双曲面.

7. 如果直纹面上一条曲线满足下列三个性质中的两个，则必满足第三个性质：(1) 为测地线；(2) 为缩括线；(3) 为与所有母线交等角($\neq 0$)的曲线.

(Bonnet)

§33. 直线汇的 Kummer 表示法

1. 简史

空间中双参数直线族的直线全体称为**直线汇**，族中的各直线称为**汇的光线**. 这方面的理论开始于 1828、1830 年 Hamilton 的研究. 1860 年，Kummer 在他的古典论文 Allgemeine Theorie der Geradlinigen Strahlensysteme(发表于 Crelles Journal, 57 卷)中对直线汇最初作了有系统的讨论，对有关的重要元素都有所涉及，只是关于基本形式的构造尚欠完善，所以后来Sannia (1908) 曾加以改良.

在已有的讨论方法中，要数 Blaschke 所创造的方法最为奇特. 这个方法起源于 E. Study 著的书«Geometrie der Dynamen» (Leipzig, 1903) 中的思想，对于直线汇的研究较为简便. 也有学者，例如 Slotnick (1928)，曾经用绝对微分法进行过讨论. 本书为了便于初学者学习，采用普通方法.

2. Kummer 的基本形式

设依赖于双参数的直线与任何曲面 S 的交点为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

而且通过点 (u,v) 的光线的单位方向向量为

$$\boldsymbol{R}(u,v)=(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)),$$

则此直线汇就由 $\boldsymbol{r}(u,v)$, $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的六个分量函数完全决定. 曲面 S 称为**参考曲面**, 它的选取完全是任意的.

现在我们作两个微分形式

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= d\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{R}=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,\\ d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{R} &= e\,du^2+(f+f')\,du\,dv+g\,dv^2, \end{aligned} \tag{1}$$

式中

$$E=\boldsymbol{R}_u\cdot\boldsymbol{R}_u,\quad F=\boldsymbol{R}_u\cdot\boldsymbol{R}_v,\quad G=\boldsymbol{R}_v\cdot\boldsymbol{R}_v; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &e=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{R}_u,\\ &f=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{R}_u,\quad f'=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{R}_v,\\ &g=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{R}_v. \end{aligned} \tag{3}$$

这两形式称为 Kummer 的**基本形式**.

一般, 上面的 $f\neq f'$. 我们问在什么时候成立

$$f=f'. \tag{4}$$

为了解决这个问题, 我们先来给出一个定义: 凡是由一个曲面的法线所构成的直线汇称为**法线汇**.

现在证明

定理 一个直线汇成为法线汇的充要条件是(4)式成立.

证明 设直线汇由一个曲面的双参数法线所构成, 则此曲面的点必可用向量表示为

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}(u,v)+t(u,v)\boldsymbol{R}(u,v), \tag{5}$$

式中, $t=t(u,v)$ 表示适当的函数. 因为汇中的光线与曲面(5)直

交，所以对于此曲面上的任何方向 $du:dv$，

$$\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}'=0 \quad 即 \quad \boldsymbol{R}\cdot d(\boldsymbol{r}+t\boldsymbol{R})=0.$$

我们可把它改写为

$$\frac{\partial t}{\partial u}+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_u=0, \qquad \frac{\partial t}{\partial v}+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_v=0. \tag{6}$$

但是，(6)式的可积分条件是

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right),$$

即

$$\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_u)=\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_v),$$

也就是

$$\boldsymbol{R}_v\cdot\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{R}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,$$

所以必须成立(4)式.

反过来，假定(4)式成立，则(6)式可积分，

$$t(u,v)=-\int\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_v dv+常数, \tag{7}$$

这时由(5)所决定的曲面必定与所给的直线汇直交，就是说，这直线汇是法线汇.　　　　证毕.

证　等式(7)的右侧含有一个任意常数，这表示了与一个法线汇的光线直交的曲面构成单参数族. 这一族曲面称为平行曲面.

3. Malus 与 Dupin 定理

几何光学的基本定理如下

定理　任何一个法线汇的光线经过若干次关于曲面的反射或折射后，仍然保持它作为法线汇的性质.

证明　我们首先给出条件

$$f=f' \tag{1}$$

的几何解释. 设参考曲面的线素为

$$ds^2=\bar{E}\,du^2+2\bar{F}\,du\,dv+\bar{G}\,dv^2,$$

且设对应于$(u,\ v)$的光线与参考曲面在交点处同曲面上的u曲线和v曲线分别相交成α角和β角,则

$$\cos\alpha=\boldsymbol{R}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_u}{\sqrt{\bar{E}}},\qquad \cos\beta=\boldsymbol{R}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{\bar{G}}},$$

或者改写为

$$\sqrt{\bar{E}}\cos\alpha=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_u,\ \sqrt{\bar{G}}\cos\beta=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_v.$$

所以,我们可以把条件(1),即

$$\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_u)=\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_v) \tag{1'}$$

改写为下列形式:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{\bar{E}}\cos\alpha)=\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{\bar{G}}\cos\beta). \tag{2}$$

为了证明本定理,只要对于一次折射说明它成立就可以了,因为一次成立的话有限次也成立,而且反射又是折射的特殊情形.

因为参考曲面S的选取是没有限制的,所以我们不妨取折射发生的境界面作为参考曲面,而且特别取参数曲线$v=$常数,使得它在各点的切线与经过同一点的光线直交,也就是使$\alpha=\frac{\pi}{2}$. 这种选取的可能性是容易明了的,只要在S的各点作光线的垂直平面使之与S在同一点的切平面相交于切线t,则沿方向t进行的曲线就是所求的曲线$v=$常数.

S上的一族参数曲线$v=$常数,即u曲线取定后,再取它的直交曲线作为另一族参数曲线$u=$常数,也就是v曲线.

设法线汇中的一条光线l经折射后变为光线l',入射角与折射角分别为γ与γ',且折射率等于n,则

$$\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}=n, \tag{3}$$

即 Snellius 法则成立. 对于光线 l，我们已知

$$\alpha=\frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

而且 $\gamma=\frac{\pi}{2}-\beta$，这是因为 l、v 曲线的切线以及 S 的法线都与 t 直交，因此这三条直线是共平面的，并且 v 曲线的切线与 S 的法线又是直交的.

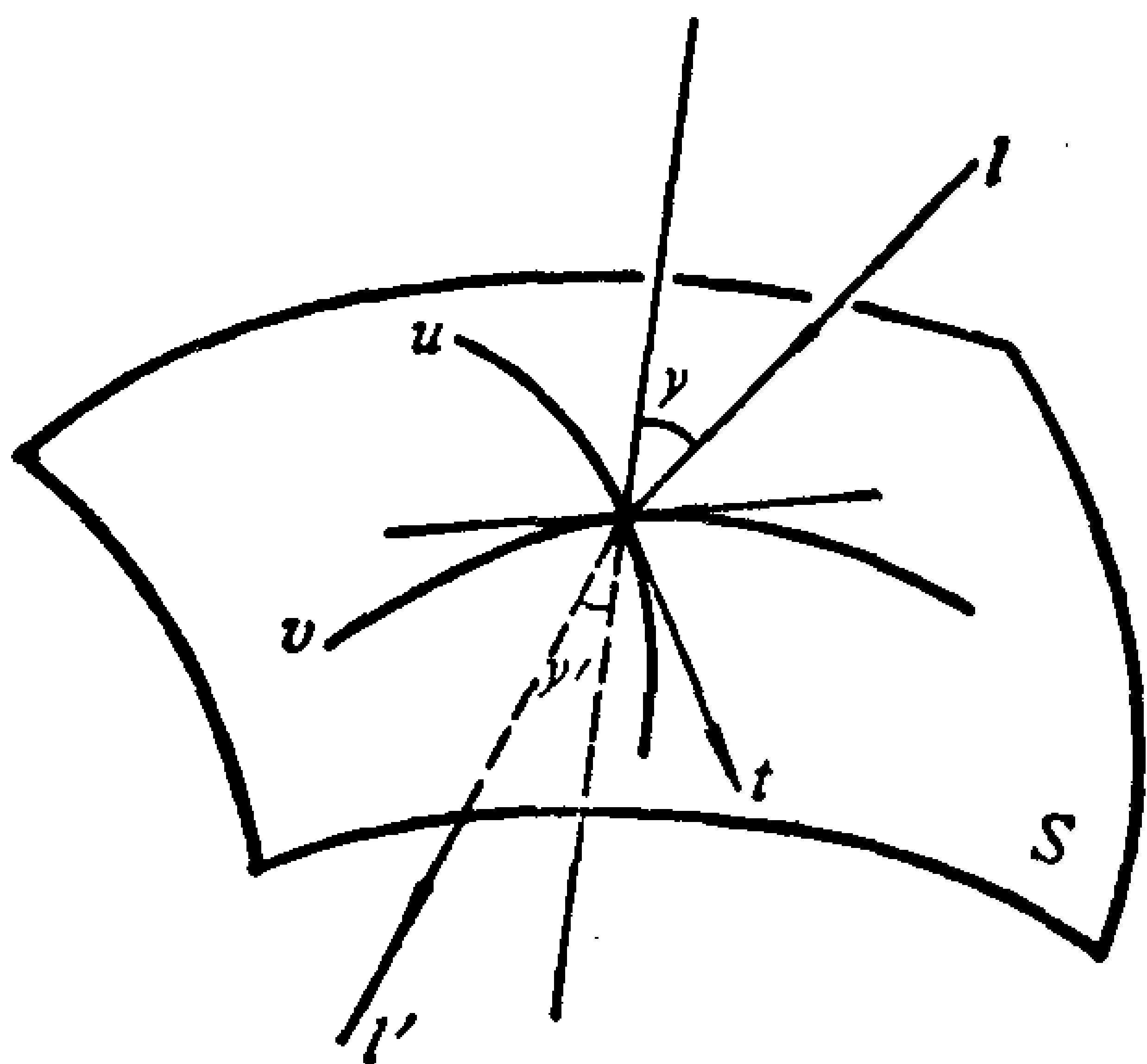


图 32

因此，原来的直线汇成为法线汇的条件(2)化为

$$\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\sin\gamma)=0. \tag{5}$$

但是对于光线 l' 来说，它与曲线 $u=$常数的切线，以及 S 的法线也同平面，从而 $\alpha'=\frac{\pi}{2}$, $\gamma'=\frac{\pi}{2}-\beta'$，于是

$$\cos\alpha'=0,\quad \cos\beta'=\sin\gamma'=n\sin\gamma.$$

所以根据(3)与(5)我们得到

$$\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\sin\gamma')=0.$$

最后的式子表明，对于直线汇(l')来说，条件(2)也成立，即经折射后的光线仍旧构成一个法线汇. 证毕.

条件(2)的另一应用见于

Beltrami **定理** *从曲面 S 的各点作一条直线 l，使它的全体构成一个法线汇．然后把 S 变形为曲面 S'，而且同时把直线 l 变更为直线 l'，使它通过 S' 上的对应点，并且 l' 在这一点与 S' 的各切线方向的交角与 l 在原出发点与 S 上对应切线方向的交角相等，则直线 l' 的全体仍构成一个法线汇．*

事实上，如果取 S 作为法线汇 (l) 的参考曲面，则条件(2)成立．在变形后，非但 $\bar{E},\bar{F},\bar{G}$ 都不变，而且角 α 与 β 根据假设也仍取原值，所以直线汇 (l') 关于曲面 (S') 也满足条件(2)，即 (l') 是法线汇．

§ 34. 直线汇的附属元素

1. 可展曲面

从一个直线汇中任意抽出单参数的直线族，这个族就构成一个直纹面，而且它的表示方程是

$$\varphi(u,v)=0, \quad 或 \quad u=f(v), \quad 或 \quad v=f(u).$$

我们来决定直线汇中的这个直纹面要成为可展曲面的条件．

设 $l(u,v)$，$l(u+du,\ v+dv)=l'$ 为一个线汇的两条邻近的光线；在一阶无穷小的范围内，用 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{R}+d\boldsymbol{R}$ 分别表示 l 与 l' 的单位方向向量；δ 为 l,l' 之间的最短距离，而且设 $\boldsymbol{n}=(\lambda,\mu,\nu)$ 是公垂线的单位方向向量，则

$$\boldsymbol{n}=c\boldsymbol{R}\times d\boldsymbol{R},$$

式中，c 是它们相应分量的比例因子．在一阶无穷小的范围内，如用 $d\sigma$ 表示 l,l' 之间的夹角，则

$$d\sigma^2=d\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{R}=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

这就是 Kummer 所引进的第一个基本形式．由于

$$(\boldsymbol{R}\times d\boldsymbol{R})^2=(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})(d\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{R})-(\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{R})^2=d\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{R}=d\sigma^2,$$

所以我们得到

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{R}\times\frac{d\boldsymbol{R}}{d\sigma}. \tag{1}$$

因为行列式

$$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_n,\boldsymbol{R}_v)=\pm\sqrt{EG-F^2}\neq 0, \tag{2}$$

即三向量 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_u,\boldsymbol{R}_v$ 是线性无关的，所以成立分解式

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_u=A\boldsymbol{R}+B\boldsymbol{R}_u+C\boldsymbol{R}_v.$$

注意到关系式

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}=1,\quad \boldsymbol{R}_u\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_v\cdot\boldsymbol{R}=0,$$

便有

$$A=\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_u)=0,$$
$$EB+FC=0,$$
$$FB+GC=\sqrt{EG-F^2}$$

由此确定 A、B、C，从而得到

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_u=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(E\boldsymbol{R}_v-F\boldsymbol{R}_u). \tag{3}$$

同样可得

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_v=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(F\boldsymbol{R}_v-G\boldsymbol{R}_u). \tag{4}$$

这样一来，我们就可改写(1)为

$$\boldsymbol{n}=\frac{(E\boldsymbol{R}_v-F\boldsymbol{R}_u)\,du+(F\boldsymbol{R}_v-G\boldsymbol{R}_u)\,dv}{\sqrt{EG-F^2}\,d\sigma}. \tag{5}$$

从而

$$\delta=\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}\,d\sigma}(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)[(E\boldsymbol{R}_v-F\boldsymbol{R}_u)\,du+(F\boldsymbol{R}_v-G\boldsymbol{R}_u)\,dv]$$

$$\frac{(Ef'-Fe)\,du^2+(Eg-Ff+Ff'-Ge)\,du\,dv+(Fg-Gf)\,dv^2}{\sqrt{EG-F^2}\,d\sigma},$$

也就是

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}\,d\sigma}\begin{vmatrix}E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv\\ e\,du+f\,dv & f'\,du+g\,dv\end{vmatrix}. \tag{6}$$

所以当直线 $l(u,v)$ 沿方向 $du:dv$ 变动时，为了能组成一个可展曲面，相邻两直线间的最短距离 δ 必须是二阶无穷小，即

$$\begin{vmatrix}E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv\\ e\,du+f\,dv & f'\,du+g\,dv\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

这是一个二阶微分方程，它定义了两个单参数可展曲面族．这样，我们得到

定理 经过一个直线汇的任何一条光线，一般可引两个可展曲面．

各条光线 l 与各个可展曲面的刃线有一个切点，称为 l 的**焦点**．每条光线上有两个焦点，它们的轨迹称为**二叶焦曲面**．

2. 二叶焦曲面及中点曲面

上述的可展曲面决定法是从量的角度出发考虑的，然而这图形对直线汇来说是射影共变的，所以从射影的观点出发也可以作出定义．

线汇中的一条直线 $l(u,v)$ 是由方程

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(u,v)+\rho\boldsymbol{R}(u,v) \tag{1}$$

所定义的，式中 $\boldsymbol{r}^*=(x^*,y^*,z^*)$ 表示 l 上动点的坐标，而且 ρ 是参数．

倘若点(1)是 l 的一个焦点，则

$$\rho=\rho(u,v),$$

而且

$$d\boldsymbol{r}^*=c\boldsymbol{R}, \tag{2}$$

其中，c 是适当的比例因子. 由(1)我们得出

$$d\boldsymbol{r}^*=d\boldsymbol{r}+\rho d\boldsymbol{R}+d\rho\cdot\boldsymbol{R}, \tag{3}$$

从此改写(2)为

$$\boldsymbol{R}_u\cdot d\boldsymbol{r}^*=0,\quad \boldsymbol{R}_v\cdot d\boldsymbol{r}^*=0,$$

也就是

$$\begin{aligned} &e\,du+f\,dv+\rho(E\,du+F\,dv)=0,\\ &f'\,du+g\,dv+\rho(F\,du+G\,dv)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

在(4)式中消去 ρ，我们则可得到可展曲面的微分方程

$$\begin{vmatrix} E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv \\ e\,du+f\,dv & f'\,du+g\,dv \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

这就是上段中的公式(7). 如果从(4)式中消去 $du:dv$，则得到 ρ 所满足的二次代数方程

$$\begin{vmatrix} e+\rho E & f+\rho F \\ f'+\rho F & g+\rho G \end{vmatrix}=0,$$

即

$$(EG-F^2)\rho^2+[gE-(f+f')F+eG]\rho+eg-ff'=0. \tag{6}$$

设 ρ_1, ρ_2 为方程(6)的两根，则

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{gE-(f+f')F+eG}{EG-F^2}, \tag{7}$$

$$\rho_1\rho_2=\frac{eg-ff'}{EG-F^2}, \tag{8}$$

而且光线 $l(u,v)$ 的两个焦点的向量表示为

$$\boldsymbol{r}_k^*=\boldsymbol{r}+\rho_k\boldsymbol{R}\qquad (k=1,2). \tag{9}$$

两个焦点的中点称作线汇中光线 l 的**中点**，它的向量表示为

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(u,v)-\frac{gE-(f+f')F+eG}{2(EG-F^2)}\mathbf{R}(u,v). \tag{10}$$

中点的轨迹称为**中点曲面**. 假如把这个曲面取为参考曲面, 则

$$gE+eG=(f+f')F. \tag{11}$$

3. 极限点

已知一个微分方程

$$A(u,v)\,du+B(u,v)\,dv=0, \tag{1}$$

在直线汇中就决定一个单参数的直纹面族, 这些直纹面与参考曲面的交线构成了一个单参数曲线族,它的定义方程就是(1).

对于光线 $l(u, v)$ 和给定的方向 $du:dv$, 取其邻近的光线 $l(u+du, v+dv)=l'$, 由此可得从 l 出发的沿方向 $du:dv$ 进行的一个直纹面 R_d. 根据 §32.1 的公式(1),我们容易求出 R_d 的缩括线与 l 的交点为

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(u,v)+r\mathbf{R}(u,v), \tag{2}$$

式中

$$r=-\frac{d\boldsymbol{r}\cdot d\mathbf{R}}{d\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}}=-\frac{e\,du^2+(f+f')\,du\,dv+g\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2} \tag{3}$$

表示 l,l' 的公垂线与 l 的交点到参考曲面与 l 的交点间的距离.

由此看到,在一条光线 l 上,距离 r 是与方向$du:dv$有关系的. 因此我们会问应该取什么方向时才能使得r取到极大值或极小值? 要解决这个问题, 只要把 r 看成 $du:dv$ 的函数而求它的极大值或极小值就可以了. 记 $du:dv=t$,并把(3)改写为

$$(rE+e)t^2+[2rF+(f+f')]t+rG+g=0.$$

由$\dfrac{\partial r}{\partial t}=0$,我们得到

$$r(Et+F)+et+\frac{1}{2}(f+f')=0,$$

$$r(Ft+G)+\frac{1}{2}(f+f')t+g=0.$$

由此消去 r，并仍把 t 改写成 $du:dv$，则有

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv & Fdu+Gdv \\ edu+\frac{1}{2}(f+f')dv & \frac{1}{2}(f+f')du+gdv \end{vmatrix}=0, \quad (4)$$

按照(4) 所定义的两个方向恰恰对应于 r 的极大值与极小值的方向. 假如由前面的两个方程中消去 t，所得到的关于 r 的方程

$$\begin{vmatrix} Er+e & Fr+\frac{1}{2}(f+f') \\ Fr+\frac{1}{2}(f+f') & Gr+g \end{vmatrix}=0 \quad (5)$$

就是决定 r 的极大值与极小值的方程. 设 r_1, r_2 为(5)的两根，则

$$r_1+r_2=-\frac{gE-(f+f')F+eG}{EG-F^2} \quad (6)$$

$$r_1r_2=\frac{4eg-(f+f')^2}{4(EG-F^2)}. \quad (7)$$

对应于 r_1, r_2 的两点是由

$$\boldsymbol{r}_k^*=\boldsymbol{r}+r_k\boldsymbol{R} \qquad (k=1,2) \quad (8)$$

所定义的. 这两点称为光线 $l(u,v)$ 的**极限点**.

根据前面一段的公式(7)知道

$$\rho_1+\rho_2=r_1+r_2.$$

这个等式说明两极限点之间的线段与两焦点之间的线段有同一中点，即光线 $l(u,v)$ 的中点.

另外，根据(6)，(7)以及前面一段的公式(7)，(8)得到

$$(r_1-r_2)^2-(\rho_1-\rho_2)^2=4(\rho_1\rho_2-r_1r_2)$$

$$=\frac{1}{EG-F^2}[(f+f')^2-4ff']=\frac{(f-f')^2}{EG-F^2}.$$

这表示两焦点之间线段的长度决不大于两极限点之间线段的长度，而且两者当且仅当线汇是法线汇时才相等.

根据微分方程（4）所定义的两个单参数族直纹面称为**主要曲面**.

如果我们设 $u=$常数与 $v=$常数分别表示一个直线汇的主要曲面，则从(4)得到

$$\frac{1}{2}(f+f')E-eF=0,$$

$$gF-\frac{1}{2}(f+f')G=0.$$

除了$\frac{E}{e}=\frac{2F}{f+f'}=\frac{G}{g}$的特殊情形外，总是可导出

$$F=0,\quad f+f'=0. \tag{9}$$

换句话说，如果把主要曲面取为参数曲面的话，一般(9)式总是成立. 这时

$$r=-\frac{e\,du^2+g\,dv^2}{E\,du^2+G\,dv^2}. \tag{10}$$

即使$\frac{E}{e}=\frac{2F}{f+f'}=\frac{G}{g}$，我们仍可适当选取参数$u,v$，使得主要曲面被表为 $u=$常数与 $v=$常数，而且成立 $F=f+f'=0$，于是这时(10)式仍旧成立.

再用

$$r_1=-\frac{e}{E},\quad r_2=-\frac{g}{G}$$

来改写(10)，则有

$$r=\frac{r_1E\,du^2+r_2G\,dv^2}{E\,du^2+G\,dv^2}. \tag{11}$$

对于直线汇中的一条光线 $l(u,v)$ 必有对应于它的两个极限点的对应方向 $d_ku:d_kv\,(k=1,2)$，这也就是满足(4)式的两个根、分

别取直线 $l(u,v)$ 与邻近的直线 $l(u+d_k u, v+d_k v)$ 的公垂线，设它的单位方向向量为 $\boldsymbol{n}_k=(\lambda_k, \mu_k, \nu_k)$，$(k=1,2)$，则这两个方向必定互相垂直．其实，为证明这个结果，不妨取主要曲面为参数曲面，于是(9)式成立．从

$$\boldsymbol{n}_1=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v},\quad \boldsymbol{n}_2=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u},$$

得出所要的结果

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\boldsymbol{R}_u\cdot\boldsymbol{R}_v=-\frac{F}{\sqrt{EG}}=0.$$

一般说来，在本节的第 1 段中我们已求得直线 $l(u,v)$ 与方向 $du:dv$ 所对应的 $l(u+du, v+dv)$ 这两直线的公垂线的单位向量 $\boldsymbol{n}$（公式(5)）．

现在由于 $F=0$，我们有

$$\boldsymbol{n}=\frac{E\boldsymbol{R}_v du-G\boldsymbol{R}_u dv}{\sqrt{EG}\,d\sigma}.$$

如果用 ω 表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 两方向之间的交角，则

$$\cos\omega=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=\frac{\sqrt{E}\,du}{\sqrt{E\,du^2+G\,dv^2}}$$

于是

$$\sin\omega=\frac{\sqrt{G}\,dv}{\sqrt{E\,du^2+G\,dv^2}}.$$

所以我们可改写(11)为

$$r=r_1\cos^2\omega+r_2\sin^2\omega. \tag{12}$$

在光线 $l(u,v)$ 的各极限点作所对应的主要曲面的切平面，这样得到的两个切平面称为 l 的**主要平面**．我们根据上述的结果得知，一条光线的两个主要平面必直交，如果在其中心作沿方向 $du:dv$ 的直纹面的切平面，则此切平面与一个主要平面间的交角等于 ω．r 所满足的上列关系式(12)是 Hamilton 发现的．

如果我们取中点曲面作为参考曲面，则 $r_1+r_2=0$，于是两极限点之间的距离 $2d=r_1-r_2=2r_1$，而且

$$r=d\cdot\cos 2\omega. \tag{13}$$

§ 35. Sannia 的理论

1. Sannia 的基本形式

在同一个空间中已知两个直线汇，我们问它们在什么时候能互相重合？为了解决这个基本问题，Sannia 给出了一个新形式，藉以替换 Kummer 的第二基本形式，而保留的第一基本形式

$$d\sigma^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \tag{A}$$

原来

$$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_u,\boldsymbol{R}_v)^2=EG-F^2,$$

$$(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_u,\boldsymbol{R}_v)=\varepsilon\sqrt{EG-F^2}\quad(\varepsilon=\pm1).$$

因此，只要我们适当选取光线的正方向，总可使 $\varepsilon=+1$. 以下如无特别声明时，我们总假定 $\varepsilon=+1$，于是所讨论的直线汇便是一个**有向汇**.

一般对于空间的两条斜直线，我们用 δ 表示它们的最短距离，用 θ 表示它们之间的夹角. 这时，$\delta\cdot\sin\theta$ 称为这两直线的**能率**. 如果把这概念应用于直线汇中的两条邻近直线 $l=l(u,v)$ 与 $l'=l(u+du,v+dv)$，由于这时 $\theta=d\sigma$，所以能率等于 $\delta\cdot d\sigma$. 再利用 § 34.1 的公式(6)，我们得到

$$\delta\cdot d\sigma=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix}E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv\\ e\,du+f\,dv & f'\,du+g\,dv\end{vmatrix}. \tag{1}$$

由于这是直线汇的**内在形式**，所以 Sannia 就把它取为第二基本形式，记作

$$\delta\cdot d\sigma=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2, \tag{B}$$

式中

$$L=\frac{Ef'-Fe}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$2M=\frac{gE-(f-f')F-eG}{\sqrt{EG-F^2}}, \tag{2}$$

$$N=\frac{Fg-Gf}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

记 $\Delta=\sqrt{EG-F^2}$, $2\lambda=\frac{1}{\Delta}[(f+f')F-gE-eG]$，则我们可把(2)改写为

$$L=\frac{1}{\Delta}(Ef'-Fe),$$

$$M-\lambda=\frac{1}{\Delta}(Eg-Ff), \tag{3}$$

$$M+\lambda=\frac{1}{\Delta}(Ff'-Ge),$$

$$N=\frac{1}{\Delta}(Fg-Gf),$$

或者

$$e=\frac{1}{\Delta}[FL-E(M+\lambda)],$$

$$f=\frac{1}{\Delta}[F(M-\lambda)-EN], \tag{4}$$

$$f'=\frac{1}{\Delta}[GL-F(M+\lambda)],$$

$$g=\frac{1}{\Delta}[G(M-\lambda)-FN],$$

式中的 λ 是依照参考曲面的选取而决定的.

因为 Sannia 的第一基本形式是线汇的球面表示，所以必定是正定的形式，而且其曲率为 $+1$.

Sannia 的第二基本形式完全由直线汇所决定，所以它适用于研究直线等价这类问题.

2. 基本定理

设两个基本形式

$$\begin{aligned}&Edu^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,\\&Ldu^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2\end{aligned}\tag{1}$$

满足一定的条件(具体形式见后文)，则除了一个运动以外可完全决定一个直线汇，使它的 Sannia 基本形式重合于这两个已知形式.

为证明这个定理起见，先假定所求的直线汇存在，并且取它的中点曲面作为参考曲面，于是按照 §34.2 的公式(11)，

$$Eg+Ge=F(f+f'),\tag{2}$$

也就是本节 1 中定义的 $\lambda=0$.

设 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 是中点曲面上点的向量表示，则必存在 (u,v) 的函数 $\alpha,\beta,\gamma;\alpha',\beta',\gamma'$ 使得

$$\boldsymbol{r}_u=\alpha\boldsymbol{R}_u+\beta\boldsymbol{R}_v+\gamma\boldsymbol{R},\tag{3}$$

$$\boldsymbol{r}_v=\alpha'\boldsymbol{R}_u+\beta'\boldsymbol{R}_v+\gamma'\boldsymbol{R}.\tag{4}$$

根据 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{R}_u=e,\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{R}_u=f,\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{R}_v=f',\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{R}_v=g$，容易得到

$$e=\alpha E+\beta F,\quad f=\alpha' E+\beta' F,$$

$$f'=\alpha F+\beta G,\quad g=\alpha' F+\beta' G.$$

解这些方程，我们求得

$$\begin{aligned}&\alpha=\frac{Ge-Ff'}{EG-F^2},\qquad \alpha'=\frac{Gf-Fg}{EG-F^2},\\&\beta=\frac{Ef'-Fe}{EG-F^2},\qquad \beta'=\frac{Eg-Ff}{EG-F^2}.\end{aligned}\tag{5}$$

另一方面，从(2)可得

$$M=\frac{Eg-Ff}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{Ff'-Ge}{\sqrt{EG-F^2}},$$

因而，改写(5)为

$$\alpha=-\frac{M}{\Delta},\ \beta=\frac{L}{\Delta};\ \alpha'=-\frac{N}{\Delta},\ \beta'=\frac{M}{\Delta}. \tag{6}$$

为了以后表示方便，改记

$$L=b_{11},\quad M=b_{12}=b_{21},\quad N=b_{22}.$$

这样一来，(3)与(4)就可表示成

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}&=-\frac{b_{12}}{\Delta}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}+\frac{b_{11}}{\Delta}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}+\gamma\boldsymbol{R},\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}&=\frac{b_{12}}{\Delta}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}-\frac{b_{22}}{\Delta}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}+\gamma'\boldsymbol{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

因为这组微分方程是可积分的，所以

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right),$$

也就是应成立

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{12}}{\Delta}\right)\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}-\frac{b_{12}}{\Delta}\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{11}}{\Delta}\right)\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\\ &+\frac{b_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial v^2}+\frac{\partial\gamma}{\partial v}\boldsymbol{R}+\gamma\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\\ &=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{12}}{\Delta}\right)\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}+\frac{b_{12}}{\Delta}\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{22}}{\Delta}\right)\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}\\ &-\frac{b_{22}}{\Delta}\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u^2}+\frac{\partial\gamma'}{\partial u}\boldsymbol{R}+\gamma'\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}.\end{aligned} \tag{8}$$

另外，如把$\boldsymbol{R}=(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v))$看成是直线汇的球面表示，则它的线素即为$d\sigma^2=Edu^2+2Fdudv+Fdv^2$. 如果我们用$\Gamma^i_{jk}$表示关于这个形式所作的 Christoffel 记号，那么

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u^2}=\Gamma^1_{11}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}+\Gamma^2_{11}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}-E\boldsymbol{R},$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u \partial v}=\Gamma_{12}^1 \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}+\Gamma_{12}^2 \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}-F \boldsymbol{R}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial v^2}=\Gamma_{22}^1 \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}+\Gamma_{22}^2 \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}-G \boldsymbol{R}.$$

把它们代入(8)式，整理后可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{22}}{\Delta}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{12}}{\Delta}\right)+\Gamma_{22}^1 \frac{b_{11}}{\Delta}-2 \Gamma_{12}^1 \frac{b_{12}}{\Delta}+\Gamma_{11}^1 \frac{b_{22}}{\Delta}-\gamma'\right] \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{11}}{\Delta}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{12}}{\Delta}\right)+\Gamma_{22}^2 \frac{b_{11}}{\Delta}-2 \Gamma_{12}^2 \frac{b_{12}}{\Delta}+\Gamma_{11}^2 \frac{b_{22}}{\Delta}+\gamma\right] \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}$$

$$+\left[\frac{\partial \gamma}{\partial v}-\frac{\partial \gamma'}{\partial u}-\frac{E b_{22}+G b_{11}-2 F b_{12}}{\sqrt{E G-F^2}}\right] \boldsymbol{R}=0.$$

由于

$$\left(\boldsymbol{R}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\right) \neq 0,$$

所以上列方程中 $\boldsymbol{R}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}$ 的系数都必须等于零，也就是

$$-\gamma=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{11}}{\Delta}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{12}}{\Delta}\right)+\Gamma_{22}^2 \frac{b_{11}}{\Delta}-2 \Gamma_{12}^2 \frac{b_{12}}{\Delta}+\Gamma_{11}^2 \frac{b_{22}}{\Delta},$$

$$\gamma'=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{22}}{\Delta}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{12}}{\Delta}\right)+\Gamma_{22}^1 \frac{b_{11}}{\Delta}-2 \Gamma_{12}^1 \frac{b_{12}}{\Delta}+\Gamma_{11}^1 \frac{b_{22}}{\Delta}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v}-\frac{\partial \gamma'}{\partial u}=\frac{E b_{22}+G b_{11}-2 F b_{12}}{\sqrt{E G-F^2}}.$$

根据 Γ_{ik}^j 的定义(§ 26. 1)，我们有

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial u}=\Gamma_{11}^1+\Gamma_{12}^2, \qquad \frac{\partial \ln \Delta}{\partial v}=\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^2,$$

于是，

$$-\Delta \gamma=\frac{\partial b_{11}}{\partial v}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u}-\Gamma_{12}^1 b_{11}+\left(\Gamma_{11}^1-\Gamma_{12}^2\right) b_{12}+\Gamma_{11}^2 b_{22}, \tag{11}$$

$$\Delta\gamma'=\frac{\partial b_{22}}{\partial u}-\frac{\partial b_{12}}{\partial v}+\Gamma_{22}^{1}b_{11}+(\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1})b_{12}-\Gamma_{12}^{2}b_{22}.$$

如果记 $u^1=u, u^2=v$，并记

$$b_{ikl}=\frac{\partial b_{ik}}{\partial u^l}-\frac{\partial b_{il}}{\partial u^k}+\Gamma_{ik}^{\mu}b_{l\mu}-\Gamma_{il}^{\mu}b_{k\mu}, \tag{12}$$

那么我们就能写出(10)的另一种形式:

$$\gamma=-\frac{1}{\Delta}b_{112}, \qquad \gamma'=\frac{1}{\Delta}b_{221}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b_{221}}{\Delta}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{b_{112}}{\Delta}\right)\right]=\frac{2Fb_{12}-Eb_{22}-Gb_{11}}{EG-F^2}. \tag{14}$$

方程组(7)则为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}&=\frac{1}{\Delta}\left[-b_{12}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}+b_{11}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}-b_{112}\boldsymbol{R}\right],\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}&=\frac{1}{\Delta}\left[-b_{22}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}+b_{12}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}+b_{221}\boldsymbol{R}\right].\end{aligned} \tag{15}$$

综上所述，对所给的两个已知形式(1)，E, F, G 必须满足一个条件：第一基本形式是正定且具有 $+1$ 的 Gauss 曲率；其次，两个形式(1)的各系数必须满足条件(14).

反过来，假定这两个条件成立，除了原点不动的一个运动外，完全可以决定 $\boldsymbol{R}=(X, Y, Z)$，于是方程组(15)就可积分，因此，除空间的运动外，完全可以决定一个直线汇.

习 题

1. 设直线汇的 Sannia 基本形式为

$$f_1=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, \quad f_2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,$$

并且由此作 f_1, f_2 关于 du, dv 的 Jacobi 行列式 $J(f_1, f_2)$，称 $J(f_1, f_2)=0$所对应的直纹面为**配分曲面**. 证明：这个曲面是实曲面，而且主要曲面的微分

方程是 $J[f_1, J(f_1, f_2)]=0$，即

$$\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}.$$

又问：微分方程 $J[f_2,\ J(f_1,\ f_2)]=0$ 所定义的是什么曲面？

(Ogura, 1916)

2. 对于方向 $du:dv$，

$$p=-\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+\ Fdudv+Gdv^2}$$

称为配分参数；它的极大值与极小值称为**主要配分参数**，记为 p_1, p_2；而

$$K=p_1p_2=(LN-M^2)/(EG-F^2)$$

及

$$H=p_1+p_2=(2FM-EN-GL)/(EG-F^2)$$

分别称为**总参数**及**平均参数**．设 q 为一条光线的中心与中点间的距离．试研究 $p, q, p/q, (H/2-p)/q, [(H/2)p-K]/q$ 的极大值与极小值所对应的五系曲面．

(Ogura, 1916)

3. 在直线汇中的光线 $l(u,\ v)$ 引线汇的两个主要曲面设第三个方向与上两方向成定角 θ，那么沿此方向所作的直纹面的 p，q 和 H 必须满足 $\frac{1}{2}H-p=q\,\mathrm{tg}\,2\theta$.

(苏步青, 1927)

4. 从一个直线汇中取出单参数光线族使构成一个直纹面．如果这些光线的中心都与中点重合，则这个直纹面满足微分方程

$$\frac{edu^2+(f+f')dudv+gdv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{gE-(f+f')F+eG}{2(EG-F^2)}.$$

5. 设 u, v 的函数 a, b, c, a', b', c' 满足关系式 $aa'+bb'+cc'=0$，则直线汇 $ay-bx+c'=0, cx-az+b'=0, bz-cy+a'=0$ 要成为法线汇，充要条件是：

$$(a^2+b^2+c^2)^{-1}\begin{vmatrix} a & db & dc \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

成为全微分．

6. 直线汇中一条光线 l 与其所有邻近光线的公垂线必定构成一个三次直纹面（通称为**柱曲面**，参考 K. Zindler, Liniengeometrie II, 82 页, 1906 年版）．

7. 设直线汇的一条光线上两焦点间的距离为 ρ，两极限点间的距离为 d，并且两焦平面间的交角为 θ. 证明:

$$\sin\theta=\frac{\rho}{d},\qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{d^2-\rho^2}}{d}.$$

8. 试求直线汇的两 Kummer 形式所满足的条件. 当直线汇是法线汇时，证明所求的条件与 Codazzi 方程一致.

9. 共焦点的两个二次曲面的公共切线构成一个法线汇. (Chasles)

10. 凡是两个焦曲面一致的直线汇，必定是由焦曲面的一族渐近曲线的切线所组成的. 设 d 为两极限点之间的距离，而 K 为焦曲面的总曲率，证明 $2d=\frac{1}{\sqrt{-K}}$.

§ 36. Study的推移原理

1. 对偶数与直线坐标

根据 E. Study 的理论，直线的几何学可转化为二维球面上的几何学. 为了实现这个目标，我们需要用一种被称为对偶数系统的特殊复数. 普通复数有两个单位 1, i, 其中 $i^2=-1$，而且它的一般形式是 $a+ib$，式中 a,b 都是实数. 对偶数则为英国几何学家 W. K. Clifford (1845—1879) 所首创，它的一般形式是 $a+\varepsilon b$，这里 a 和 b 是实数，而且新单位 ε 满足关系式 $\varepsilon^2=0$. 对偶数满足乘法交换律，但因子定理却不成立. 换句话说，两个对偶数的积等于零，各因子可以不等于零，例如 $b\cdot c\neq0$, $\varepsilon b\cdot\varepsilon c=0$ 就是一个例子. 我们用普通复数的方法也可定义对偶数的正则函数. 例如:

$$\cos(\alpha+\varepsilon\beta)=\cos\alpha\cos\varepsilon\beta-\sin\alpha\sin\varepsilon\beta.$$

$$\cos\varepsilon\beta=1-\frac{\varepsilon^2}{2}\beta^2+\cdots=1,\quad \sin\varepsilon\beta=\varepsilon\beta-\frac{\varepsilon^3\beta^3}{3}+\cdots=\varepsilon\beta,$$

$$\cos(\alpha+\varepsilon\beta)=\cos\alpha-\varepsilon\beta\sin\alpha. \tag{1}$$

设一直线 $\mathscr{L}$ 决定于两点 $P(\boldsymbol{r})$ 和 $Q(\overline{\boldsymbol{r}})$，其中

$$\boldsymbol{r} \text{ 的坐标为}(x, y, z),$$
$$\overline{\boldsymbol{r}} \text{ 的坐标为}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z});$$

记

$$\boldsymbol{R} = p(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}), \quad \overline{\boldsymbol{R}} = p(\boldsymbol{r} \times \overline{\boldsymbol{r}}), \tag{2}$$

式中 $p \neq 0$. 这两向量的六个分量构成$\mathscr{L}$的 Plücker坐标，它们之间成立着一个恒等式

$$\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{R}} = 0. \tag{3}$$

现在，选取 p 使得

$$\boldsymbol{R}^2 = 1, \tag{4}$$

那么，$\boldsymbol{R}(\xi, \eta, \zeta)$的三个分量便成为$\mathscr{L}$的方向余弦.

如果一点 $\boldsymbol{\rho}(\alpha, \beta, \gamma)$在$\mathscr{L}$上，那么我们有

$$\boldsymbol{\rho} = a\boldsymbol{r} + b\overline{\boldsymbol{r}} \quad (a + b = 1),$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{R} &= (a\boldsymbol{r} + b\overline{\boldsymbol{r}}) \times p(\overline{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}) \\ &= p(a + b)(\boldsymbol{r} \times \overline{\boldsymbol{r}}),\end{aligned}$$

就是

$$\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{R} = \overline{\boldsymbol{R}}. \tag{5}$$

反过来，如果点$\boldsymbol{\rho}$满足这关系式(5)，那么它一定在直线$\mathscr{L}$上. 事实上，$\boldsymbol{\rho}$的三个分量满足(5)式的三个方程，其中，由于(3)的关系从前二方程可推导第三方程，这表示了点 $\boldsymbol{\rho}$ 在一条直线上. 另外，$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}$ 或 $= \overline{\boldsymbol{r}}$ 都满足(5). 所以 $\boldsymbol{\rho}$ 常在直线$\mathscr{L}$上.

从原点引直线$\mathscr{L}$的直交直线，由公式(5)易知垂足的向径是

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{R} \times \overline{\boldsymbol{R}}. \tag{6}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{R} &= (\boldsymbol{R} \times \overline{\boldsymbol{R}}) \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2 \cdot \overline{\boldsymbol{R}} - (\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{R}})\boldsymbol{R} \\ &= \overline{\boldsymbol{R}},\end{aligned}$$

即(5)成立. 另外，还有

$$\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\rho} = 0.$$

我们按照 Study 导入向径

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}+\varepsilon\overline{\boldsymbol{R}}. \tag{7}$$

显然，这对偶向径和直线 $\mathscr{L}$ 有一一对应．由于 $\boldsymbol{R}^2=1, \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{R}}=0, \varepsilon^2=0$，所以

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}^2=1. \tag{8}$$

因此，$\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 表示单位球上的一个对偶点．这样一来，三维空间 S_3 的直线被表示为单位球上的对偶点．这就是所谓 Study 的推移原理．

2. 对偶点与 Sannia 的基本形式

设 $\mathscr{L}, \mathscr{L}^*$ 为二直线，$\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{R}}^*$ 为对应的对偶点．从(7)和

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}^*=\boldsymbol{R}^*+\varepsilon\overline{\boldsymbol{R}}^* \tag{1}$$

作乘积

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{R}}^*=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^*+\varepsilon(\boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{R}}^*+\boldsymbol{R}^*\overline{\boldsymbol{R}}), \tag{2}$$

而且用 φ 表示二直线间的角，则

$$\mathscr{R}(\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{R}}^*)=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^*=\cos\varphi, \tag{3}$$

式中，$\mathscr{R}$ 表示实部分．

为了明确它的对偶部分，我们在 $\mathscr{L}$ 上取两点：

$$\boldsymbol{r} \quad 和 \quad \overline{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R},$$

而且在 $\mathscr{L}^*$ 上也取两点

$$\boldsymbol{r}^* \quad 和 \quad \overline{\boldsymbol{r}}^*=\boldsymbol{r}^*+\boldsymbol{R}^*.$$

现在，从

$$\boldsymbol{r}(x,y,z), \quad \boldsymbol{r}^*(x^*,y^*,z^*),$$
$$\overline{\boldsymbol{r}}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \quad \overline{\boldsymbol{r}}^*(\bar{x}^*,\bar{y}^*,\bar{z}^*)$$

作行列式

$$V=\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 1 & x^* & y^* & z^* \\ 1 & \bar{x}^* & \bar{y}^* & \bar{z}^* \end{vmatrix} \tag{4}$$

而且关于前二行展开它，我们便有

$$V = \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{R}}^* + \boldsymbol{R}^*\overline{\boldsymbol{R}} = \mathscr{D}(\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{R}}^*), \tag{5}$$

式中，$\mathscr{D}$ 表示对偶部分.

可是，另一方面

$$V = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x^*-x & y^*-y & z^*-z \\ \bar{\xi}^* & \bar{\eta}^* & \bar{\zeta}^* \end{vmatrix} = (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}, \overline{\boldsymbol{R}}^*), \tag{6}$$

这里，我们如前所述，已令

$$\boldsymbol{R}(\xi, \eta, \zeta), \overline{\boldsymbol{R}}^*(\bar{\xi}^*, \bar{\eta}^*, \bar{\zeta}^*).$$

此外，我们移动两点 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}^*$，使分别重合于 $\mathscr{L}$、$\mathscr{L}^*$ 同它们的公垂线的交点，而且用 $\bar{\varphi}$ 表示 $\mathscr{L}$、$\mathscr{L}^*$ 间的最短距离. 这样一来，成立下列关系：

$$\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{r} = \bar{\varphi}\frac{(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^*)}{\sqrt{(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^*)^2}},$$

所以

$$V = -\bar{\varphi}\sqrt{(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^*)^2} = -\bar{\varphi}\sin\varphi, \tag{7}$$

因此，

$$\mathscr{D}(\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{R}}^*) = -\bar{\varphi}\sin\varphi. \tag{8}$$

从(3)、(8)和段 1 (1)得出

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{R}}^* = \cos\varphi - \varepsilon\bar{\varphi}\sin\varphi = \cos\Phi, \tag{9}$$

式中

$$\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi} \tag{10}$$

称两直线间的**对偶角**. 从(9)立即得出两直线 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}^*$ 的直交条件

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}\widetilde{\boldsymbol{R}}^* \equiv \cos\Phi = 0. \tag{11}$$

这是由于，不仅 $\varphi = \frac{\pi}{2}$，而且还有 $\bar{\varphi} = 0$.

两直线间的角和最短距离对于空间的任何运动是不变的. 反过来，如果空间的一个连续点变换使任何两直线间的角和最短距离留着不改变，就是说，以这些为不变量，那么这种变换一定是运动. 所以在单位球面上，凡使对偶角不变的对应，就是**对偶旋转**，与空间运动构成一对一的对应。

现在，设一个直线汇的光线 $l(u,v)$ 对应于对偶点

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}(u,\ v)+\varepsilon\overline{\boldsymbol{R}}(u,v). \tag{12}$$

那么，在单位球面上所作的**对偶线素**

$$d\widetilde{\boldsymbol{R}}^2 \tag{13}$$

是对偶旋转的不变形式. 从(12)我们有

$$d\widetilde{\boldsymbol{R}}^2=d\boldsymbol{R}^2+\ 2\varepsilon d\boldsymbol{R}d\overline{\boldsymbol{R}}, \tag{14}$$

于是它的实部分等于

$$d\boldsymbol{R}^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{15}$$

就是 Sannia 的**第一基本形式**. 我们将证明:

$$\frac{1}{2}\mathscr{D}\ (d\widetilde{\boldsymbol{R}}^2)\equiv d\boldsymbol{R}d\overline{\boldsymbol{R}} \tag{16}$$

是 Sannia 的**第二基本形式**.

实际上，设 $d\varphi$ 和 $d\boldsymbol{\varphi}$ 分别表示直线 $l(u,v)$ 和它的邻近直线 $l'(u+du,v+dv)$ 间的角和最短距离，那么

$$d\Phi^2=d\varphi^2+2\varepsilon d\varphi d\boldsymbol{\varphi}.$$

可是，当我们局限于二阶微小的计算时，便有

$$\begin{aligned}d\Phi^2&=\sin^2 d\Phi=1-\cos^2 d\Phi\\&=1-\left[\widetilde{\boldsymbol{R}}\left(\widetilde{\boldsymbol{R}}+\ d\widetilde{\boldsymbol{R}}+\frac{1}{2}d^2\widetilde{\boldsymbol{R}}\right)\right]^2\\&=1-\left[\widetilde{\boldsymbol{R}}^2\ +\widetilde{\boldsymbol{R}}d\widetilde{\boldsymbol{R}}+\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{R}}d^2\widetilde{\boldsymbol{R}}\right]^2\\&=1-\left[1+\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{R}}d^2\widetilde{\boldsymbol{R}}\right]^2\end{aligned}$$

$$=-\widetilde{R}d^2\widetilde{R}=d\widetilde{R}^2.$$

所以

$$\frac{1}{2}\varnothing\ (d\widetilde{R}^2)=\frac{1}{2}\varnothing(d\Phi^2)=d\varphi d\overline{\varphi}.$$

这就是 Sannia 的第二基本形式[参考 § 35.1,公式(1)].

习　题

1. 设一直纹面的方程为

$$\widetilde{R}=R(t)+\varepsilon\overline{R}(t).$$

证明配分参数[§ 32.1]等于 $R'(t)\overline{R}'(t):R'^2(t)$.

2. 证明

$$p=\sqrt{R'^2},\qquad \overline{p}=\frac{R'\overline{R}'}{\sqrt{R'^2}},\qquad q=\frac{(RR'R'')}{R'^2},$$

$$\overline{q}=\frac{(\overline{R}R'R'')+(R\overline{R}'R'')+(RR'\overline{R}'')}{R'^2}-2\frac{(RR'R'')\cdot R'\overline{R}'}{(R'^2)^2}$$

都是一直纹面的积分不变量.

3. 如果两个斜曲面互为变形,而且它们的母线互相对应,那么缔括线也互相对应.

4. 为了使两个斜曲面互为变形,而且它们的母线互相对应,充要条件是:$p:\overline{p}:\overline{q}$ 沿对应母线相同. (Blashke)

§ 37. 导来直线汇

1. 定义

在一曲面 S 上取一个单参数族的曲线,它的切线全体构成一个直线汇. 如选定这族曲线为 S 的参数曲线 u, 即 v=常数,并取曲线 v, 即 u=常数,使两系参数曲线成共轭系统,那么第一系可展曲面是以曲线 u 为刃线,而且第二系可展曲面沿一条曲线 v 包络成原曲面 S. 我们方便上采用 S 为参考曲面. 设 S_1 为第二叶焦曲面. 于是所论直线汇的光线与 S_1 上的曲线 v 相切. 在

S_1 上，曲线 u 的切线也构成另一直线汇，S_1 是它的第一叶焦曲面，从而它的第二叶焦曲面 S_2 当然就被唯一地决定下来. 接着，在 S_2 上按照它的曲线 v 的切线又可定义第二直线汇，而且在 S_2 上再引曲线 u 的切线，便获得第三汇. 这个方法一直可以持续下去，除非其中有一叶曲面退缩为一条曲线而引起中断.

同样，在曲面 S 上引曲线 v 的切线汇，它的一叶焦曲面当然是 S，而且另一叶 S_{-1} 便被完全决定了下来. 接着，在 S_{-1} 上的曲线 v 又构成另一线汇. 以下依此类推，结果是，我们获得了一列曲面

$$\cdots, S_{-2}, S_{-1}, S, S_1, S_2, \cdots$$

仅当列中有一曲面退缩为曲线时，这个曲面列才会中断. 列中，各曲面上的参数曲线构成一个共轭系统，称**共轭网**. 按照 Darboux，称这列直线汇为**导来直线汇**. 给定了一个直线汇，如果要推出它的导来汇，我们就必须对它的可展曲面有关的偏微分方程进行积分，因为这样才能把焦曲面的共轭网的曲线决定下来.

2. 分析表示

由于参数曲线 u, v 是曲面 S 上的共轭网曲线，S 的点向径 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 必须满足 Laplace 方程[参考 § 14.3]

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + b\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

式中，a 和 b 都是 u, v 的已知函数. 设 S_1 的对应点的向径表示为 $\boldsymbol{r}_1$，则

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} + \lambda_1 \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u},$$

式中 $\lambda_1\sqrt{E}$ 表示两焦点间的距离($E = \boldsymbol{r}_u^2$).

然而线汇的光线必须与 S_1 上的曲线 v 相切，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial v}=\mu_1\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u},\tag{2}$$

式中 μ_1 是 u, v 的函数.

如果把上列的 $\boldsymbol{r}_1$ 的表示式代入(2)里，而且按照(1)改写，我们有

$$\lambda_1=\frac{1}{b},\ \mu_1=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{b}\right)-\frac{a}{b},$$

于是曲面 S_1 便决定于方程

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\frac{1}{b}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u},\tag{3}$$

而且方程(2)采取下列形式:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial v}=\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{b}\right)-\frac{a}{b}\right\}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}.\tag{4}$$

同样，我们得到曲面 S_{-1} 的表示

$$\boldsymbol{r}_{-1}=\boldsymbol{r}+\frac{1}{a}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},\tag{5}$$

而且

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_{-1}}{\partial u}=\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{b}{a}\right\}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}.$$

从(3)和(5)易知，当 a 或 b 等于零时，曲面 S_{-1} 或 S_1 取位于无穷远. 当 a 和 b 都等于零时，S 变成了**平移曲面**. 由此得知，一个平移曲面的生成曲线构成了两个直线汇，而且各汇的另一叶焦曲面都在无穷远处.

倘若 S_1 退缩成曲线，那么 $\boldsymbol{r}_1$ 单是 u 的函数. 从(4)得出条件

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{a}{b}.$$

同样，S_{-1} 要退缩成曲线，就有条件

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{b}{a}.$$

对于 Laplace 方程(1)所作的两个量

$$h=\frac{\partial a}{\partial u}+ab,$$

$$k=\frac{\partial b}{\partial v}+ab$$

称为 Laplace-Darboux 不变量. 所以我们可将上述的结果表达如次: 为了焦曲面 S_1 或 S_{-1} 退缩成曲线, 充要条件是: 不变量 h 或 k 等于零.

习 题

1. 设曲线 u, v 在曲面 S 上构成共轭网, 而且 S_{-1} 为曲线 v 的切线汇的第二叶焦曲面. 求出 S 和 S_{-1} 的对应点间的距离 ρ 和两焦平面的交角 Ω.

2. 在前题假设下, 证明曲面 S 在点 (u, v) 的总曲率 K 等于

$$K=-\left\{\frac{\sin^2\Omega}{\rho^2}+\frac{\sin^2\Omega}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}+\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right\}.$$

(Berwald 1909)

3. 在一个抛物面(椭圆的或双曲的都可以)上的各点引轴的平行直线而且作各直线关于抛物面的反射光线. 证明: 这反射直线汇的两叶焦曲面退缩成两条焦点抛物线, 于是它的中点包络是 Enneper 极小曲面.

(V. Kommerell)

4. 设中点曲面是参考曲面, 而且 $u=$常数和 $v=$常数是两条可展曲面. 以 $\left\{{l \atop ik}\right\}'$ 表示关于第一基本形式 $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ 所作的 Christoffel 记号, 则直线汇的两焦曲面是

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}-\rho\boldsymbol{R}.$$

第一基本量分别是:

$$E_1=4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+\left\{{2 \atop 12}\right\}'\rho\right)^2,$$

$$F_1=-4\rho\left\{{1 \atop 12}\right\}'\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+\left\{{2 \atop 12}\right\}'\rho\right),$$

$$G_1=4\rho^2\left(G+\left\{{1 \atop 12}\right\}'^2\right);$$

$$E_2=4\rho^2\left(E+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'^2\right),$$

$$F_2=-4\rho\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho\right),$$

$$G_2=4\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)^2.$$

第二基本量分别是($\Delta=\sqrt{EG-F^2}$):

$$L_1=-\frac{2\Delta}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\rho\right),\quad M_1=0,\quad N_1=-\frac{2\Delta}{\sqrt{G}}\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}'\rho;$$

$$L_2=-\frac{2\Delta}{\sqrt{E}}\begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}'\rho,\quad M_2=0,\quad N_2=\frac{2\Delta}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho\right).$$

总曲率分别是:

$$K_1=\frac{\Delta^2\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}'}{4\rho G^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)},\quad K_2=\frac{\Delta^2\begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}'}{4\rho E^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)}$$

5. 为了在直线汇的两叶焦曲面上的渐近曲线互相对应(这种线汇称W汇),充要条件是

$$K_1K_2=\left(\frac{\sin\theta}{2\rho}\right)^4.$$

式中,θ表示两焦平面间的交角,而且2ρ表示两焦点间的距离.

6. 决定一直线汇使它的两叶焦曲面沿各自曲率线和可展曲面相交(Guichard 汇).

§ 33. 主要曲面和可展曲面的球面表示

1. 主要曲面

前文[§ 34. 3]中,我们曾经定义过一条光线$l(u,v)$上的两个极限点和所对应的两方向

$$\begin{vmatrix}Edu+Fdv & Fdu+Gdv\\ edu+\frac{1}{2}(f+f')dv & \frac{1}{2}(f+f')du+gdv\end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

这个微分方程定义了线汇的两单参数族直纹面，其中确有两曲面通过各条光线 $l(u,v)$的，称它们为**主要曲面**. 各主要曲面在对应极限点的切平面决定于 $l(u, v)$和在这极限点的公垂线. 我们称它为**主要平面**.

从(1)易知：曲面 u（即 $v=$常数）和曲面 v（即 $u=$常数）要成为主要曲面，充要条件除了两 Kummer 形式的系数成比例的情形外，应当是[§ 34.3，公式(9)]

$$F=0, \qquad f+f'=0. \tag{2}$$

所以一个线汇的主要曲面在单位球面上的表示是一个直交系，而且各光线的两主要平面必须直交.

为了应用的方便，我们下面将求出一个直线汇的两 Kummer 基本形式有关的可积分条件.

设 $\boldsymbol{r}(u,v)$表示参考曲面 S，则成立下列方程：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= \alpha \boldsymbol{R}_u + \beta \boldsymbol{R}_v + \gamma \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{r}_v &= \alpha_1 \boldsymbol{R}_u + \beta_1 \boldsymbol{R}_v + \gamma_1 \boldsymbol{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

式中，各系数具有表示式

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{Ge-Ff'}{EG-F^2}, \quad \beta = \frac{Ef'-Fe}{EG-F^2}, \gamma = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{R}, \\ &\alpha_1 = \frac{Gf-Fg}{EG-F^2}, \quad \beta_1 = \frac{Eg-Ff}{EG-F^2}, \gamma_1 = \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

以$\begin{Bmatrix} & j & \\ i & & k \end{Bmatrix}'$表示关于$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$所作的Christoffel记号，则微分方程组(3)的可积分条件是

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix}' e + \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix}' f - \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}' f' + \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix}' g + F\gamma - E\gamma_1 = 0, \\ &\frac{\partial f'}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix}' e + \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix}' f - \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix}' f' + \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix}' g + G\gamma - F\gamma_1 = 0, \\ &\frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} + f - f' = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

现在，我们采用主要曲面为参数曲面 u, v，而且采用中点曲面为参考曲面. 这样一来，(2)式成立，而且两极限点间的距离 $2r$ 等于

$$2r = -\frac{2e}{E} = \frac{2g}{G}, \tag{6}$$

从而

$$e = -rE, \quad g = rG. \tag{7}$$

从(5)式的最初两方程式和(2)、(7)便可求出 γ_1 和 γ，结果如下：

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial v}(rE) - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{\sqrt{EG}}\right), \\ \gamma &= \frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial u}(rG) + \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{\sqrt{EG}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

可积分条件(5)式的最后方程变成

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \ln E}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial \ln G}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial^2 \ln EG}{\partial u \partial v} r + \\ &+ \frac{\partial}{\partial u}\left\{\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{f}{\sqrt{EG}}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f}{\sqrt{EG}}\right)\right\} + 2f = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

这时，中点曲面决定于下列方程组：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= -r\boldsymbol{R}_u + \frac{f'}{G}\boldsymbol{R}_v + \gamma\boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{r}_v &= \frac{f}{E}\boldsymbol{R}_u + r\boldsymbol{R}_v + \gamma_1\boldsymbol{R}, \end{aligned} \tag{10}$$

式中，γ 和 γ_1 的值为(8).

由此可知，我们所探讨的问题归结到微分方程(9)的积分. 由于 r 和 f 这两函数中有一个是可以任意选定的，剩下来的一个则为一个二阶偏微分方程的解. 所以单位球面上的任何直交曲线系是足够表示一个直线汇的主要曲面的，而且线汇的方程含有三个任意函数.

2. 可展曲面

如果采用单位球面上的参数曲线 u, v 来表示直线汇的可展曲面，那么，为此的充要条件是

$$f'E-eF=0, \quad gF-fG=0.$$

再如取定中点曲面为参考曲面，并且用 2ρ 表示两焦点间的距离，我们便有

$$\rho=-\frac{e}{E}=\frac{g}{G},$$

因此 $$e=-\rho E, f=-f'=\rho F, g=\rho G. \tag{1}$$

将这些值代入前段公式(5)的前两方程，从此解出 γ 和 γ_1:

$$\gamma=\frac{\partial \rho}{\partial u}+2\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\rho, \quad \gamma_1=-\frac{\partial \rho}{\partial v}-2\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho,$$

而且(5)式的最后方程变为

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\frac{\partial \rho}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\frac{\partial \rho}{\partial v}+\left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'+\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'+F\right]\rho=0. \tag{2}$$

从这微分方程的一个解便可求得一个直线汇，使它的可展曲面具备已给定的球面表示，而且线汇的中点曲面决定于方程组

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u&=-\rho\boldsymbol{R}_u+\left(\rho_u+2\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)\boldsymbol{R},\\ \boldsymbol{r}_v&=\rho\boldsymbol{R}_v-\left(\rho_v+2\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)\boldsymbol{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

§ 39. 极小线汇

1. 定义

当一个直线汇的两叶焦曲面都是可展曲面，而且它们的刃线

都是极小曲线时，这直线汇称**极小线汇**.

我们首先阐明一个曲面在什么条件下才会变成以极小曲线为刃线的可展曲面.

这种曲面 $r(u,v)=(x,y,z)$ 应当具有下列方程:

$$x=\int\frac{1-u^2}{2}\varphi(u)du+\frac{1-u^2}{2}\varphi(u)v,$$

$$y=i\int\frac{1+u^2}{2}\varphi(u)du+\frac{i(1+u^2)}{2}\varphi(u)v,$$

$$z=\int u\varphi(u)du+u\varphi(u)v,$$

式中，$\varphi(u)\neq 0$ 是单独 u 的函数. 从此得出第一基本量

$$E=v^2\varphi^2(u),F=0,G=0,$$

因此 $\Delta^2\equiv EG-F^2=0$. 这个条件不仅是必要，而且是充分的. 实际上，这时所论曲面的线素应当是

$$ds^2=(\sqrt{E}du+\sqrt{G}dv)^2.$$

以 λ 表示 $\sqrt{E}du+\sqrt{G}uv$ 的一个积分因子，则按照

$$\lambda(\sqrt{E}du+\sqrt{G}dv)=du_1$$

便可定义函数 u_1，使得 $ds^2=\frac{1}{\lambda^2}du_1^2$. 所以当曲面的参数曲线被定为曲线 $u_1=$常数 和另一系曲线 $v_1=$常数时，$F_1=0$，$G_1=0$. 改写后，我们有

$$\frac{\partial r}{\partial u_1}\frac{\partial r}{\partial v_1}=0,\quad\left(\frac{\partial r}{\partial v_1}\right)^2=0.$$

第二方程也可写成另一形式

$$\frac{\partial x}{\partial v_1}=k\frac{1-u_1^2}{2},\frac{\partial y}{\partial v_1}=ki\frac{1+u_1^2}{2},\frac{\partial z}{\partial v_1}=ku_1,$$

式中 k 表示任意函数. 通过积分，我们得到曲面的表示

$$x=\frac{1-u_1^2}{2}\int kdv_1+\lambda,$$

$$y=i\frac{1+u_1^2}{2}\int kdv_1+\mu, \tag{1}$$

$$z=u_1\int kdv_1+\nu,$$

式中，λ、μ、ν 表示单独 u_1 的函数. 把最后式(1)代入上列的另一条件中，结果是

$$(1-u_1^2)\frac{d\lambda}{\partial u_1}+i(1+u_1^2)\frac{d\mu}{du_1}+2u_1\frac{d\nu}{du_1}=0.$$

所以曲面(1)的切平面的方程是

$$(1-u_1^2)(\xi-x)+i(1+u_1^2)(\eta-y)+2u_1(\zeta-z)=0.$$

于是这可展曲面的刃线是极小曲线.

这种曲面称为**极小可展曲面**.

2. 极小直线汇的性质

已知一个直线汇时，如果取它的中点曲面做参考曲面，而且取它的可展曲面做参数曲面 u,v，则中点曲面决定于微分方程组

$$\boldsymbol{r}_u=-\rho\boldsymbol{R}_u+\left(\rho_u+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)\boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\rho\boldsymbol{R}_v-\left(\rho_v+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)\boldsymbol{R}, \tag{1}$$

式中，2ρ表示两焦点间的距离[§38.2，公式(3)].

两焦点曲面 S_1 和 S_2 的方程分别是

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}-\rho\boldsymbol{R}. \tag{2}$$

从(1)容易导出

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial u}=2\left(\rho_u+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)\boldsymbol{R},\qquad \frac{\partial\boldsymbol{r}_1}{\partial v}=2\rho\left(\boldsymbol{R}_v-\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\boldsymbol{R}\right);$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_2}{\partial u}=-2\rho\left(\boldsymbol{R}_u-\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\boldsymbol{R}\right),\ \frac{\partial\boldsymbol{r}_2}{\partial v}=-2\left(\rho_v+\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho\right)\boldsymbol{R}. \tag{3}$$

由此就可求出 S_1 和 S_2 的第一基本量 E_1, F_1, G_1; E_2, F_2, G_2[参见§37,习题4]. 特别是,

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\sqrt{E_1G_1-F_1^2}=4\rho\sqrt{G}\left(\rho_u+\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}'\rho\right),\\ \Delta_2&=\sqrt{E_2G_2-F_2^2}=4\rho\sqrt{E}\left(\rho_v+\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}'\rho\right).\end{aligned}\tag{4}$$

于是一个直线汇要成为极小线汇的条件是

$$\begin{aligned}\rho\sqrt{G}\left(\rho_u+\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}'\rho\right)&=0,\\ \rho\sqrt{E}\left(\rho_v+\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}'\rho\right)&=0.\end{aligned}\tag{5}$$

如果 $\rho=0$,则从(1)得知中点曲面退缩成一点. 如果(5)式中的两方程左端括弧式之一等于零,则从(3)得知曲面 S_1 或 S_2 将退缩成曲线. 这两种特殊情况都不是我们所要讨论的. 所以,在一般情况下,所求的条件是

$$E=0, G=0.\tag{6}$$

反过来,如果(6)成立,则 $\Delta_1=0, \Delta_2=0$, 于是两叶焦曲面都是极小可展曲面. 因此,极小线汇的可展曲面在单位球面上的象是球面的极小曲线.

从(6)和§38.2, 公式(1)得出 $e=0, g=0$, 而且按假定 $f+f'=0$,所以这时成立

$$drd\boldsymbol{R}=0,\tag{7}$$

就是 $r=0$. 换句话说,任何直纹面的缩括线总是落在中点曲面上. 由于从(7)也可导出(6), 所以我们证明了 Ribaucour 定理(1881):

定理　一个极小线汇的任何直纹面的缩括线总是落在它的中点曲面上. 反过来,如果一个直线汇具有这个性质,则它必定是极

小线汇。此外，它的中点曲面与其球面表示具有线素直交的性质。

Ribaucour 还证明了下列

定理 一个极小线汇的中点包络面是极小曲面.

所谓中点包络面是指在各光线的中点引这光线的垂直平面包络而成的曲面. 所以包络面的 Gauss 球面表示也就是直线汇的球面表示 $\boldsymbol{R}$. 如上所述，中点包络面上的参数曲线 u, v 是以球面上的极小曲线为象的. 如果我们能够证明这两系曲线 u, v 构成包络面上的共轭网，那么便可断定包络面是极小曲面. 实际上，用 $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}; \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ 表示包络面的第一、第二基本量. 它的第三基本量之中，按照假定 $\bar{e}=e=0, \bar{g}=g=0$[参考 § 19.1，公式(6)]，即：

$$\bar{G}\bar{L}^2-2\bar{F}\bar{M}\bar{L}+\bar{E}\bar{M}^2=0,$$

$$\bar{E}\bar{N}^2-2\bar{F}\bar{M}\bar{N}+\bar{G}\bar{M}^2=0.$$

因此，当 $\bar{M}=0$ 时，$\bar{E}=0, \bar{G}=0$，于是包络面的平均曲率等于零.

为了证明 $\bar{M}=0$，我们首先写下包络面的切平面的方程

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})=0,$$

或者

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\rho}=W \quad (W=\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}),$$

式中 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 表示中点，而且 $\boldsymbol{\rho}$ 表示动点向径. 于是

$$W_u=\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{r}+\rho_u,$$

$$W_v=\boldsymbol{R}_v\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{R}_v\boldsymbol{r}+\rho_v,$$

$$\begin{aligned}W_{uv}&=\boldsymbol{R}_{uv}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{r}_v+\rho_{uv}\\&=\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{r}+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\boldsymbol{R}_v\boldsymbol{r}-F\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{R}_u\boldsymbol{R}_v+\rho_{uv}\\&=\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'W_u+\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'W_v-FW+\rho_{uv}-\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'\rho_u\\&\quad-\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'\rho_v+\rho F\\&=\rho_{uv}-FW+\rho F.\end{aligned}$$

这是因为，这时我们有 $E=0, G=0, \begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'=0, \begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'=0$. 然而按照 §38.2，公式(2)，$\rho_{uv}+F\rho=0$，所以

$$W_{uv}+FW=0. \tag{8}$$

另一方面，在中点平面 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}=W$ 的包络面上，我们知道

$$\overline{M}=-\left[W_{uv}-\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'W_u-\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'W_v+FW\right].$$

从(8)便得出 $\overline{M}=0$，就是说，参数曲线 u, v 构成共轭网，这就是所欲证明的.

§40. Guichard 直线汇

1. 定义

Guichard 曾提出并解决了下列问题：决定这样的直线汇使得两叶焦曲面和可展曲面相交于焦曲面的曲率线.

这里按照 Bianchi 的命名，称这种线汇为 Guichard 线汇. 如在 §38 所述，我们选取可展曲面作为参数曲面. 根据假设得知两焦叶 S_1, S_2 的第二基本量 $\overline{M}_1=0$, $\overline{M}_2=0$，所以这线汇要成为 Guichard 汇的充要条件是

$$\overline{F}_1=0, \quad \overline{F}_2=0,$$

也就是[参考 §37，习题 4]

$$\begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}'=0, \quad \begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}'=0. \tag{1}$$

现在，我们将阐明所论的 Guichard 直线汇与常总曲率曲面间存在着的密切关系. 为此，采取一个曲面的渐近曲线作为参数曲线 u, v，于是 $L=0, N=0$，而且总曲率

$$K=-\frac{M^2}{EG-F^2}=-\frac{eg-f^2}{M^2}=-\frac{1}{\rho^2},$$

式中 $d\sigma^2=edu^2+2fdudv+gdv^2$ 表示所论曲面的球面表示的线素．于是

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{\triangle}\quad(\triangle=\sqrt{EG-F^2});$$

$$E=\rho^2 e, F=-e^2 f, G=\rho^2 g,$$

而且 Codazzi 方程[参考 § 26，习题 7]可改写为

$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial u}=-2\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}', \frac{\partial\ln\rho}{\partial v}=-2\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}'.$$

从此立即得出下列定理：

如果一个直线汇是 Guichard 汇，则它的可展曲面的球面表示必为一个常总曲率曲面的渐近曲线的象，而且反过来也成立。

这时，我们总是能选取参数 u, v 使得

$$E=G=1, F=-\cos\omega,$$

式中 ω 满足

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}=\sin\omega.$$

从 § 38.2，公式(2)易得

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}=\rho\cos\omega. \tag{2}$$

这微分方程有三个特殊解 ξ, η, ζ，即 $\boldsymbol{R}$ 的三个分量．例如，取 ξ 为 ρ，则从 § 38.2 得到 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 满足

$$\frac{\partial x}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=0.$$

这表示了，这个决定于 $\rho=\xi$ 的直线汇是以一个平面为中点曲面的．

2. Guichard 线汇与 Voss 曲面

按照 § 39.2，公式(3)得知，焦曲面 $S_1(\boldsymbol{r}_1(u, v))$ 满足下列方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u}=-2\frac{\partial \rho}{\partial u}\boldsymbol{R}. \tag{1}$$

所以在 S_1 上各点所引曲率线 $v=$常数的切线就是所论线汇的光线. 我们易证，这条光线必平行于中心曲面 Σ_1 的法线. 实际上，由 S_1 在一点的法线和曲线 $u=$常数(曲率线)的切线决定了一个平面，而这平面不但垂直于所论的光线，还成为中心曲面 Σ_1 的切平面.

由此可见，对于曲面 S_1 的曲率线系(u, v)必有中心曲面 Σ_1 上对应的共轭曲线网，而且这网在球面上的象重合于线汇的可展曲面的象. 另一方面，当我们关于 $\Sigma_1(\overline{\boldsymbol{r}})$的线素作出 Christoffel 记号$\overline{\left\{\begin{matrix}k\\ i\ j\end{matrix}\right\}}$时，由于参数曲线$(u,v)$构成共轭网，而且 Σ_1 的曲面法线的单位向量是 $\boldsymbol{R}$，所以

$$\overline{\boldsymbol{r}}_u\boldsymbol{R}_v=0,\quad \overline{\boldsymbol{r}}_v\boldsymbol{R}_u=0. \tag{2}$$

关于 u 对(2)的前一方程导微，

$$\overline{\boldsymbol{r}}_{uu}\boldsymbol{R}_v+\overline{\boldsymbol{r}}_u\boldsymbol{R}_{uv}=0,$$

即

$$\left(\overline{\left\{\begin{matrix}1\\ 1\ 1\end{matrix}\right\}}\overline{\boldsymbol{r}}_u+\overline{\left\{\begin{matrix}2\\ 1\ 1\end{matrix}\right\}}\overline{\boldsymbol{r}}_v\right)\boldsymbol{R}_v+\left(\left\{\begin{matrix}1\\ 12\end{matrix}\right\}'\boldsymbol{R}_u+\right.$$

$$\left.+\left\{\begin{matrix}2\\ 12\end{matrix}\right\}'\boldsymbol{R}_v\right)\overline{\boldsymbol{r}}_u=0,$$

即

$$\overline{N}\overline{\left\{\begin{matrix}2\\ 11\end{matrix}\right\}}+\overline{L}\left\{\begin{matrix}1\\ 12\end{matrix}\right\}'=0. \tag{3}$$

同样，我们得到

$$\overline{L}\overline{\left\{\begin{matrix}1\\ 22\end{matrix}\right\}}+\overline{N}\left\{\begin{matrix}2\\ 12\end{matrix}\right\}'=0. \tag{4}$$

这样一来，段 1 的充要条件(1)现在可改写为

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\}}=0, \overline{\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\}}=0. \quad (5)$$

这些条件也表示曲面 Σ_1 上参数曲线 u, v 都是测地线的条件[§25.5]. Voss(1885)研究过一些具有一个共轭测地线网的曲面;我们称这种曲面为 Voss 曲面. 由于上述的结果是可逆的，所以得到

Guichard 定理. 为了一个曲面上有这样一系曲率线，使它的切线构成 Guichard 线汇，充要条件是：这曲面的一个中心曲面成为 Voss 曲面，而且构成线汇的切线与所论中心曲面的法线平行.

我们还可证明

定理　设一动平面垂直于 Guichard 汇的各条光线而且把这光线的两焦点间的线段分成定比，则这平面的包络是 Voss 曲面.

推理　一个 Guichard 线汇的中点包络是 Voss 曲面.

此地证明从略，让读者自己去做.

§41. W 直线汇

1. 定义

设一直线汇的两叶焦曲面以各自的渐近曲线互相对应，则称它为W直线汇.

我们在前文中［参考§30.2］证明过一个W曲面的法线汇具备这性质，这就是W汇称呼的由来，因为采用了 Weingarten 的首字.

如果采取中点曲面作为参考曲面并以可展曲面为参数曲面，便易求两焦叶的第一和第二基本量[参考§37，习题4]. 从此便得到两叶的渐近曲线互相对应的条件：

$$L_1N_2=N_1L_2,$$

或改写为

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}'\rho\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+\left\{\begin{matrix}1\\12\end{matrix}\right\}'\rho\right)=\rho^2\left\{\begin{matrix}2\\11\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}',$$

或者按照各叶的总曲率 K_1, K_2，两焦点间的距离 2ρ 和两焦平面间的交角 θ 来表示为

$$K_1K_2=\left(\frac{\sin\theta}{2\rho}\right)^4. \tag{1}$$

这就是一个直线汇要成为W汇的充要条件.

2. Lelieuvre 公式

为了研究W汇的方便，我们首先阐明一个曲面S参考于它的渐近曲线 u,v 的情况. 这时

$$L=0, N=0;$$

$$K=-\frac{M^2}{EG-F^2}=-\frac{eg-f^2}{M^2}=-\frac{1}{\rho^2}; \tag{1}$$

$$E=\rho^2e, F=-\rho^2f, G=\rho^2g,$$

而且 Weingarten 公式变为

$$\boldsymbol{n}_u=\frac{1}{\rho\sqrt{EG-F^2}}(F\boldsymbol{r}_u-E\boldsymbol{r}_v),$$

$$\boldsymbol{n}_v=\frac{1}{\rho\sqrt{EG-F^2}}(-G\boldsymbol{r}_u+F\boldsymbol{r}_v),$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别表示S的点的向径和法线单位向量.

从此解出 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$:

$$\boldsymbol{r}_u=\varepsilon\rho(\boldsymbol{n}_u\times\boldsymbol{n}),$$

$$\boldsymbol{r}_v=-\varepsilon\rho(\boldsymbol{n}_v\times\boldsymbol{n}).$$

式中 $\varepsilon=\pm1$ 必须按照总曲率K的正负而分别取 $+1$ 或 -1.

又令

$$\boldsymbol{V}=\sqrt{-\varepsilon\rho}\,\boldsymbol{n},$$

我们便得出Lelieuvre 公式(1888)如下:

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}_u,\quad \boldsymbol{r}_v=-(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}_v). \tag{2}$$

这组方程的可积分条件是

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{V}}{\partial u\partial v}=\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\partial v}-f\right)\boldsymbol{V}.$$

实际上,从定义得出

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial u}=\frac{\partial \ln\sqrt{\rho}}{\partial u}+\boldsymbol{V}\sqrt{-\varepsilon\rho}\,\boldsymbol{n}_u,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial v}=\frac{\partial \ln\sqrt{\rho}}{\partial v}\boldsymbol{V}+\sqrt{-\varepsilon\rho}\,\boldsymbol{n}_v$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\boldsymbol{V}}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial^2\ln\sqrt{\rho}}{\partial u\partial v}\boldsymbol{V}+\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial u}\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial v}+\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial v}\left(\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial u}-\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial u}\boldsymbol{V}\right)\\&\quad+\sqrt{-\varepsilon\rho}\left(-\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial u}\boldsymbol{n}_v-\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial v}\boldsymbol{n}_u-f\boldsymbol{n}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2\ln\sqrt{\rho}}{\partial u\partial v}+\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial u}\frac{\partial\ln\sqrt{\rho}}{\partial u}-f\right)\boldsymbol{V}.\end{aligned}$$

所以V的三个分量是方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial u\partial v}-f\right)\theta$$

的解.

反过来,设给定了方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\lambda\theta, \tag{3}$$

式中λ是u,v的任何函数,且V是以(3)的三个特殊解为分量的向量,那么由(2)所决定的曲面$\boldsymbol{r}(u,v)$必以它的渐近曲线为参数曲线u,v,而且它的总曲率等于

$$K=-\frac{1}{\rho^2}=-(V^2)^{-2}. \tag{4}$$

3. W 直线汇的决定

Guichard(1890)把上述的 Lelieuvre 公式应用到W汇的研究中去. 现在,我们叙述大致情况于下.

设两曲面$S(\boldsymbol{r})$、$\bar{S}(\bar{\boldsymbol{r}})$都参考于各自的渐近曲线$u,v$,并且以同一组$(u,v)$为对应点. 那么,在怎样的条件下,这两曲面的对应点的连线才会成为它们的公共切线呢?

S和$\bar{S}$的点向径$\boldsymbol{r}$和$\bar{\boldsymbol{r}}$分别决定于下列二方程组:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}_u,\ \ \boldsymbol{r}_v=-(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}_v);\\&\bar{\boldsymbol{r}}_u=\bar{\boldsymbol{V}}\times\bar{\boldsymbol{V}}_u,\quad \bar{\boldsymbol{r}}_v=-(\bar{\boldsymbol{V}}\times\bar{\boldsymbol{V}}_v).\end{aligned}\tag{1}$$

式中

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{V}}{\partial u\partial v}=\lambda\boldsymbol{V},\qquad \frac{\partial^2\bar{\boldsymbol{V}}}{\partial u\partial v}=\bar{\lambda},\bar{\boldsymbol{V}}\tag{2}$$

而且当

$$\boldsymbol{V}^2=\alpha,\ \bar{\boldsymbol{V}}^2=\bar{\alpha},\tag{3}$$

便有

$$K=-\frac{1}{\alpha^2},\ \ \bar{K}=-\frac{1}{\bar{\alpha}^2}.\tag{4}$$

由于$\boldsymbol{V}$和$\bar{\boldsymbol{V}}$分别表示S和$\bar{S}$在对应点的法线向量,所以要使对应点的连线切于S和$\bar{S}$,条件应当是

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}})=0,\bar{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}})=0,$$

或者改写为

$$\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}=m(\boldsymbol{V}\times\bar{\boldsymbol{V}}),\tag{5}$$

式中m表示数量函数.

为决定m,我们作两焦点间的距离2ρ的平方,即:

$$\begin{aligned}(2\rho)^2=(\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r})^2&=m^2(\boldsymbol{V}\times\bar{\boldsymbol{V}})^2\\&=m^2[\boldsymbol{V}^2\bar{\boldsymbol{V}}^2-(\boldsymbol{V}\bar{\boldsymbol{V}})^2]\end{aligned}$$

$$=m^2\alpha\bar{a}\left[1-\left(\frac{V}{\sqrt{\alpha}}\frac{\bar{V}}{\sqrt{\bar{a}}}\right)^2\right]$$

$$=m^2\alpha\bar{a}\sin^2\theta,$$

式中 θ 表示两焦平面间的交角. 然而按前段公式(1)易知 $m^4=1$. 我们选定 $m=1$,于是定下了向量 $\bar{V}$ 的正向,而且改写(5),

$$\bar{r}-r=V\times\bar{V}. \tag{6}$$

关于 u 对(6)的两边导微,而且按(1)简化它,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(\bar{V}+V)\right]\times(\bar{V}-V)=0,$$

即
$$\frac{\partial}{\partial u}(\bar{V}+V)=k(\bar{V}-V),$$

式中 k 表示待定的数量函数.

同样,我们有

$$\frac{\partial}{\partial v}(\bar{V}-V)=l(\bar{V}+V),$$

式中 l 表示另一个待定的数量函数.

这样,我们得到方程组

$$\frac{\partial}{\partial u}(\bar{V}+V)=k(\bar{V}-V),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\bar{V}-V)=l(\bar{V}+V). \tag{7}$$

现在,对前一方程两边关于 v 导微,而且按照后一方程改写导微的结果,我们有

$$\left(\bar{\lambda}-kl-\frac{\partial k}{\partial v}\right)\bar{V}+\left(\lambda-kl+\frac{\partial k}{\partial v}\right)V=0.$$

同样,

$$\left(\bar{\lambda}-kl-\frac{\partial l}{\partial u}\right)\bar{V}-\left(\lambda-kl+\frac{\partial l}{\partial u}\right)V=0.$$

所以上列两方程中的每个括弧式都等于 0,于是

$$\bar{\lambda}=kl+\frac{\partial k}{\partial v},\lambda=kl-\frac{\partial k}{\partial v},\frac{\partial k}{\partial v}=\frac{\partial l}{\partial u}.$$

最后的关系式可以表为

$$k=\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{1}{\theta_1},\ l=\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{1}{\theta_1},\tag{8}$$

从而

$$\bar{\lambda}=\theta_1\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\left(\frac{1}{\theta_1}\right),\ \lambda=\theta_1^{-1}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\partial v}.\tag{9}$$

从(2)易知 θ_1 和 θ_1^{-1} 分别满足

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\partial v}=\lambda\theta_1,\ \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)=\bar{\lambda}\frac{1}{\theta_1}.$$

按照(8)改写(7),我们终于获得

$$\frac{\partial}{\partial u}(\theta_1\overline{V})=-\begin{vmatrix}\theta_1 & V\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u}\end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\theta_1\overline{V})=\begin{vmatrix}\theta_1 & V\\ \frac{\partial\theta_1}{\theta v} & \frac{\partial V}{\partial v}\end{vmatrix}.\tag{10}$$

设 θ_1 是上列第一方程的一个已知解,那么从(10)的积分便求得向量函数 $\overline{V}$, 于是把(1)积分起来, 我们就获得一个曲面 $\overline{S}$, 使 $\overline{S}$ 与 S 不仅是以各自的渐近曲线互相对应, 而且对应点的连线还切于 S 和 $\overline{S}$.

综合以上所述,我们得到

定理 如果一个曲面 S 参于于渐近曲线, 而且它的方程具备 Lelieuvre 形式,那么我们从方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\lambda\theta$$

的各解便可决定一个对应曲面 $\overline{S}$, 使 S 和 $\overline{S}$ 成为一个 W 直线汇的两叶焦曲面. 这个曲面 $\overline{S}$ 是单独由积分来决定的.

§42. 圆汇与曲线汇

1. Ribaucour 定理

设空间有单参数族的连续圆周集. 它的轨迹就称为**圆面**. Ribaucour 证明了下列

定理 在一个圆面上，与它的单参数族中的各圆直交的四条任何曲线必有下述性质：它们与族中任一圆的四个交点组成一定的交比.

证明 设一个动圆的中心$(\boldsymbol{c})$和半径 r 都是参变数 v 的函数. 为了表达动圆上任何一点的向径$(\boldsymbol{r})$，我们在动圆所在的平面上取定互相直交的两单位向量 $\boldsymbol{a}(v)$ 和$\boldsymbol{b}(v)$，于是

$$\boldsymbol{a}^2=1,\ \boldsymbol{b}^2=1,\ \boldsymbol{ab}=0. \tag{1}$$

动圆上任何一点的向径是

$$\boldsymbol{r}=r(\boldsymbol{a}\cos\theta+\boldsymbol{b}\sin\theta)+\boldsymbol{c}, \tag{2}$$

式中 θ 表示动圆上一点$(\boldsymbol{r})$与圆心的连线同方向 $\boldsymbol{a}$ 的直线形成的交角. 现在，令

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=u, \tag{3}$$

把 θ 看成 u 的函数，圆面$(\boldsymbol{r}(u,v))$的基本量 E,F 是从(2)和(3)算出的：

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=\boldsymbol{r}_\theta^2\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2=\frac{4r^2}{(1+u^2)^2},$$

$$\begin{aligned}F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v&=(-r\boldsymbol{a}\sin\theta+r\boldsymbol{b}\cos\theta)\frac{d\theta}{du}\\&\quad\cdot[(r\boldsymbol{a})'\cos\theta+(r\boldsymbol{b})'\sin\theta+\boldsymbol{c}']\\&=\frac{2}{1+u^2}(-r\boldsymbol{a}\sin\theta+r\boldsymbol{b}\cos\theta)\\&\quad\cdot\{r\boldsymbol{a}'\cos\theta+r\boldsymbol{b}'\sin\theta+r'(\boldsymbol{a}\cos\theta+\boldsymbol{b}\sin\theta)+\boldsymbol{c}'\}\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{1+u^2}(A\cos\theta+B\sin\theta+C),$$

式中“′”表示关于 v 的导微，而且 A,B,C 表示 v 的某些函数.

由于各圆的切线方向对应于 $\delta v=0$，所以圆面上与这族圆直交的曲线决定于微分方程

$$E du+F dv=0,$$

也就是形如

$$\frac{du}{dv}=P+Qu+Ru^2 \tag{4}$$

的 Riccati 型方程，其中 P,Q,R 都是 v 的已知函数. 因此，它的任何四个解 u_1,u_2,u_3,u_4 有一定的交比，即:

$$(u_1u_2,u_3u_4)=\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}:\frac{u_1-u_4}{u_2-u_4}=\text{常数}.$$

设 θ_i 是按(3)对应于 u_i 的角($i=1,2,3,4$)，我们容易算出

$$(u_1u_2,u_3u_4)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_3-\theta_1)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_3-\theta_2)}:\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_4-\theta_1)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_4-\theta_2)}.$$

右边恰恰表示了在动圆上四个交点的交比. **证毕.**

2. 法圆汇

空间内由双参数族的曲线组成的连续集合，称**曲线汇**. 如果有单参数族的曲面存在，使各曲面和汇里的各曲线都直交，则称这汇为**法曲线汇**.

设 $\boldsymbol{r}(u,v,t)$是三个自变量 u,v,t 的向量函数，而且假定它的三个分量是独立的，直到必要阶数是可导的函数. 当取定 u,v 二值时，因 t 的变动，点 $\boldsymbol{r}(u,v,t)$画成一条曲线，而且随着 u,v 值之不同，我们便获得双参数族的曲线. 所以

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v,t) \tag{1}$$

表示一个曲线汇.

如果这个汇是法曲线汇,则必有单参数族的函数

$$t=t(u,v) \tag{2}$$

存在,使得向量方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u,v,t(u,v)] \tag{3}$$

所代表的各曲面都直交于所有的汇曲线,于是必须成立

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_t+\boldsymbol{r}_t^2\frac{\partial t}{\partial u}=0,\\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_t+\boldsymbol{r}_t^2\frac{\partial t}{\partial v}=0.\end{aligned} \tag{4}$$

现在令

$$T=\boldsymbol{r}_t^2,\ U=\boldsymbol{r}_t\boldsymbol{r}_u,\ V=\boldsymbol{r}_t\boldsymbol{r}_v, \tag{5}$$

则(4)式表示:

$$Tdt+Udu+Vdv=0 \tag{6}$$

是一个全微分方程,所以曲线汇(1)要成为法曲线汇的充要条件是

$$T\left(\frac{\partial U}{\partial v}-\frac{\partial V}{\partial u}\right)+U\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial v}\right)+V\left(\frac{\partial T}{\partial u}-\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0. \tag{7}$$

双参数族圆的一个连续集合称为**圆汇**. 我们将求一个圆汇要成为法圆汇的条件.

设二向量函数 $\boldsymbol{a}(u,v),\boldsymbol{b}(u,v)$ 满足下列条件:

$$\boldsymbol{a}^2=1,\ \boldsymbol{b}^2=1,\ \boldsymbol{ab}=0.$$

又设 $\boldsymbol{c}$ 是 u,v 的另一向量函数,而且 r 是 u,v 的函数,则

$$\boldsymbol{r}=r(\boldsymbol{a}\cos\theta+\boldsymbol{b}\sin\theta)+\boldsymbol{c} \tag{8}$$

表示一个圆汇. 如果要决定一系曲面使与双参数族圆都直交, 那就必须对方程

$$\begin{aligned}rd\theta+[(\boldsymbol{bc}_u)\cos\theta-(\boldsymbol{ac}_u)\sin\theta+r(\boldsymbol{ba}_u)]du\\ +[(\boldsymbol{bc}_v)\cos\theta-(\boldsymbol{ac}_v)\sin\theta+r(\boldsymbol{ba}_v)]dv=0\end{aligned} \tag{9}$$

进行积分. 当方程(9)为可积分时, 所论的圆汇变为法圆汇. 然

而，这时条件(7)应当具备下列形式：

$$A+B\cos\theta+C\sin\theta=0, \tag{7'}$$

式中 A,B,C 都是 u,v 的某些函数，所以圆汇成为法圆汇的条件化为

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0.$$

实际上，计算的结果如下：

$$r^2\left[\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_u)-\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_v)\right]+(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_u)(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_v)-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_v)(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_u)=0, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{r}\left[(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_v)(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_u)-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_u)(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_v)+\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_v)-\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_u)\right]+(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_u)\boldsymbol{r}_v-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_v)\boldsymbol{r}_u=0, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{r}\left[(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_v)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_u)-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_u)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_v)+\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_u)-\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_v)\right]+(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_v)\boldsymbol{r}_u-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_u)\boldsymbol{r}_v=0. \tag{12}$$

当这三方程不同时成立时，满足方程(7′)的解至多只有两个．所以我们得到 Ribaucour 定理：

如果存在三个曲面各与一个圆汇的所有双参数圆直交，那么这种曲面必有单参数族之多，于是圆汇变为法圆汇．

这时，令 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$，便可改写(7′)为全微分方程

$$dt=(at^2+bt+c)du+(a't^2+b't+c')dv, \tag{13}$$

式中 $a,b,c;a',b',c'$ 表示 u,v 的函数．从此又得下列定理：

在一个法圆汇里，凡与双参数族圆直交的四曲面同汇里的任何圆必相交于常交比的四点．

设 S 是法圆汇的一个直交曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$，参数曲线是曲面的曲率线，$E,F=0,G$ 是第一基本量，而且 R_1,R_2 是两主曲率半径．那么，下列二向量函数

$$\mathbf{X}_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u,\ \mathbf{X}_2=\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_v \tag{14}$$

必须满足 Rodriques 公式[§ 16. 1,公式(3)和(7)]:

$$\boldsymbol{n}_u=-\frac{\sqrt{E}}{R_1}\mathbf{X}_1,\qquad \boldsymbol{n}_v=-\frac{\sqrt{G}}{R_2}\mathbf{X}_2$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{X}_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mathbf{X}_2+\frac{\sqrt{E}}{R_1}\boldsymbol{n},\quad \frac{\partial\mathbf{X}_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mathbf{X}_2;\\&\frac{\partial\mathbf{X}_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mathbf{X}_1,\ \frac{\partial\mathbf{X}_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mathbf{X}_1+\frac{\sqrt{G}}{R_2}\boldsymbol{n},\end{aligned}\tag{14'}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 S 的单位法线向量.

通过 S 的各点 P，当然有圆汇中的一个圆. 设这圆所在平面与 P 处的切平面的交线(S 在 P 处的切线)同 $\mathbf{X}_1$ 构成角 φ,而且圆的半径为 r,则圆心的向径 $\boldsymbol{r}_1$ 决定于方程

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+r(\mathbf{X}_1\cos\varphi+\mathbf{X}_2\sin\varphi)\,(=\boldsymbol{c}). \tag{15}$$

从(8)得知这时

$$\boldsymbol{a}=\mathbf{X}_1\cos\varphi+\mathbf{X}_2\sin\varphi,\ \ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}, \tag{16}$$

于是

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_u=\sqrt{E}\cos\varphi+\frac{\partial r}{\partial u},\ \ \boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_v=\sqrt{G}\sin\varphi+\frac{\partial r}{\partial v},$$

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_u=\frac{r\sqrt{E}}{R_1}\cos\varphi,\qquad \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_v=\frac{r\sqrt{G}}{R_2}\sin\varphi,$$

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_v=-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_v=\frac{\sqrt{G}}{R_2}\sin\varphi,$$

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_u=-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_u=\frac{\sqrt{E}}{R_1}\cos\varphi.$$

这时,微分方程(9)变为

$$d\theta=\left[(\sin\theta)\left(\frac{1}{r}r_u+\frac{1}{r}\sqrt{E}\cos\varphi\right)-\frac{1}{R_1}\sqrt{E}(\cos\varphi)(1+\cos\theta)\right]du$$

$$+\left[(\sin\theta)\left(\frac{1}{r}r_v+\frac{1}{r}\sqrt{G}\sin\varphi\right)-\frac{1}{R_2}\sqrt{G}(\sin\varphi)(1+\cos\theta)\right]dv \tag{17}$$

而且可积分条件(10)、(11)、(12)采取下列形式:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r}\right)=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{r}\frac{1}{R_2}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r}\frac{1}{R_1}\right)+$$

$$\frac{\sqrt{EG}}{r^2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\cdot\sin\varphi\cos\varphi=0. \tag{19}$$

当所论的曲面 S 是球面时，$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}=$常数，于是(18)与(19)变为同一方程. 如果这个双参数族圆与另一曲面 S' 直交,那这族必形成法线汇. 其实，从几何的观察也容易证明这个结果. 这是由于,S' 和汇中的所有圆都直交,而且各圆和球面 S 也直交，从而关于 S 的反演所作 S' 的对应曲面 S'' 也和这些双参数族圆直交，于是所论的圆族有了三个直交曲面而成为法圆汇.

现在假设 S 不是球面. 从 Codazzi 方程[§26，习题 6]容易导出

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{R_2}\right)=\frac{1}{R_1}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{R_1}\right)=\frac{1}{R_2}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}. \tag{20}$$

又从(18)、(19)解 r_u 和 r_v:

$$r_u=r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\operatorname{ctg}\varphi-\sqrt{E}\cos\varphi,$$

$$r_v=-r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\operatorname{tg}\varphi-\sqrt{G}\sin\varphi. \tag{21}$$

由于方程(18)表示了

$$\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r}du+\frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{r}dv$$

是全微分，所以存在一个适当的函数 ψ 使

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r}&=-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u},\\ \frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{r}&=-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial v}.\end{aligned}\tag{22}$$

从(19)、(20)和(22)得出

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=\frac{\partial\ln\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\ln\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}.\tag{23}$$

反过来，设 ψ 是偏微分方程(23)的任何解．令

$$r^{-2}=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\ln\psi}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\ln\psi}{\partial v}\right)^2\equiv\nabla\ln\psi,\tag{24}$$

$$\cos\varphi=-\frac{r}{\sqrt{E}}\frac{\partial\ln\psi}{\partial u},\quad \sin\varphi=-\frac{r}{\sqrt{G}}\frac{\partial\ln\psi}{\partial v}.\tag{25}$$

又令　$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=t$，我们便可改写(17)为

$$dt=\left\{t\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{r}{\psi}+\frac{r}{R_1}\frac{\partial}{\partial u}\ln\psi\right\}du+\left\{t\frac{\partial}{\partial v}\ln\frac{r}{\psi}+\frac{r}{R_2}\frac{\partial}{\partial v}\ln\psi\right\}dv.\tag{26}$$

积分后，便有

$$t=\frac{r}{\psi}\left\{C+\int\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{1}{R_2}\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)\right\},\tag{27}$$

式中 C 是积分常数．最后方程表示了直交曲面，于是决定了一个法线汇．换句话说，

定理　给定了一个曲面 S，我们在它的各点总是可引一个直交圆，使全体双参数族的圆构成一个法圆汇．

3. 拟球与法圆汇

现在考察各圆有一定半径的法圆汇．这时，$r=$常数，我们可把前段公式(21)改写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\sqrt{E}\sin\varphi}{r}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\sqrt{G}\cos\varphi}{r}-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}. \tag{1}$$

这组偏微分方程的可积分条件是

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}. \tag{2}$$

然而，最后方程表示了，所论的曲面 S 具有常总曲率 $-\frac{1}{r^2}$，即拟球，所以我们得到下列的 Ribaucour 定理：

如果一个法圆汇的圆半径是常数 r，则与这圆汇相直交的单参数族曲面都是拟球，而且各拟球的总曲率等于 $-\frac{1}{r^2}$.

汇圆的中心的向径为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+r(\boldsymbol{X}_1\cos\varphi+\boldsymbol{X}_2\sin\varphi). \tag{3}$$

关于 u 对它偏导微，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u}=\boldsymbol{r}_u+r\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}_1}{\partial u}\cos\varphi+\frac{\partial \boldsymbol{X}_2}{\partial u}\sin\varphi\right)$$
$$+r(-\boldsymbol{X}_1\sin\varphi+\boldsymbol{X}_2\cos\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

从前段公式(14′)和本段公式(1)易证

$$(\boldsymbol{X}_2\cos\varphi-\boldsymbol{X}_1\sin\varphi)\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial u}=0. \tag{4}$$

同样，我们有

$$(\boldsymbol{X}_2\cos\varphi-\boldsymbol{X}_1\sin\varphi)\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial v}=0. \tag{5}$$

方程(4)和(5)不外乎表示，圆汇的各圆心轨迹在各圆心处和各圆所在平面相切.

另外，把各圆心与曲面 S 上的对应点连接起来的直线，必构成一个法直线汇.

实际上，所连接成的直线不仅通过曲面上的点 $\boldsymbol{r}$，而且它的方向单位向量是

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{X}_1\cos\varphi+\boldsymbol{X}_2\sin\varphi.$$

这个线汇要成为法线汇，充要条件是[§33.2]

$$\boldsymbol{r}_u\frac{\partial}{\partial v}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_v\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{R},$$

或者按前段公式(14′)和本段公式(1)改写为

$$-\sin\varphi\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sin\varphi\cdot\sqrt{E}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\cos\varphi\cdot\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\cos\varphi\cdot\sqrt{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

然而，最后等式是成立的，所以这个法线汇的两叶焦曲面是 S 和圆心轨迹，而且两焦点间的距离等于定长 r. 这样，我们得到

定理　当一个法圆汇的各圆半径 r 等于常数时，各圆心的轨迹曲面在圆心和圆所在平面相切，而且这曲面是总曲率 $-\frac{1}{r^2}$ 的拟球.

为了补充定理后半的证明，我们选取圆心轨迹曲面的曲率线作为参数曲线 u,v 而且令

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{X}_2=\frac{1}{\sqrt{G}}\boldsymbol{r}_v,$$

则所论的圆汇决定于下列方程：

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{r}+r(\boldsymbol{X}_1\cos\theta+\boldsymbol{X}_2\sin\theta).$$

然而，这时成立

$$\boldsymbol{X}_1\frac{\partial\boldsymbol{X}_2}{\partial u}=-\boldsymbol{X}_2\frac{\partial\boldsymbol{X}_1}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},$$

$$\boldsymbol{X}_1\frac{\partial\boldsymbol{X}_2}{\partial v}=-\boldsymbol{X}_2\frac{\partial\boldsymbol{X}_1}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

所以前段所述的两条件(11)和(12)对于所论的圆汇[注意：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{r}$,

$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{a},\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{b}$]都成立. 至于前段公式(10)则变为

$$r^2\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\boldsymbol{X}_2\frac{\partial \boldsymbol{X}_1}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\boldsymbol{X}_2\frac{\partial \boldsymbol{X}_1}{\partial v}\right)\right]+(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{r}_u)(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{r}_v)=0,$$

即:

$$-r^2\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right]+\sqrt{EG}=0.$$

于是所论曲面的总曲率等于$-\frac{1}{r^2}$. 证毕.

这定理是 Ribaucour(1870)所发现, Bianchi 于 1879 年曾加以证明. Darboux 在其著书第三卷给出了他的几何证法. 同时, 还证明了下列定理:

在总曲率等于$-\frac{1}{r^2}$的一个拟球的切平面上, 以切点为中心、r为半径作一个圆周, 则这圆的全体构成一个法圆汇, 而且它的直交曲面也都是总曲率等于$-\frac{1}{r^2}$的拟球.

总 习 题

1. 设一个直线汇的两系可展曲面与它的中点曲面相交于共轭网, 试求这时的充要条件.

2. 在曲面各点 P 处的切平面上, 以 P 为中心作对应的 Dupin 标形[§15.4], 并且以这二次曲线为底作直圆柱面, 各圆柱面的轴称光轴. 为使由曲面各点处所引的两条光轴构成法线汇, 原曲面具有常总曲率是充要条件.
(Cosserat, 1894)

3. 证明一个曲面上单参数族曲线的切线全体构成一个法线汇的充要条件是: 这族的曲线为曲面的测地线.

4. 设双参数族的平面曲线构成一个法曲线汇. 当变形这双参数族曲线所在平面的包络曲面, 但仍保存切点邻域和有关的位置时, 变形后的双参数族的平面曲线也构成法曲线汇.

5. 设一个拟球的总曲率为$-\frac{1}{r^2}$. 从曲面各点 P 引一条切线 PQ 且截下

定长$\overline{PQ}=r$，使Q的轨迹曲面与PQ相切于Q. 那么，Q的轨迹曲面也是总曲率$-\frac{1}{r^2}$的拟球.

6. 设有三系曲面形成一个三重直交系. 从一系中的一个曲面各点引经过这点的其他两系曲面的交线，则在这点所作交线的密切圆必构成法圆汇.

(Ribaucour, 1870)

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝微分几何学　　新一版
作者＝苏步青原著　　姜国英改写
页数＝３７４
ＳＳ号＝１０８３３４４９
出版日期＝１９８８年０９月第１版